

[I]

(1) 直線 l は点 $P(a, -3a^2)$ を通るので、傾きを m として、

$$y = m(x - a) - 3a^2$$

とおける。これが C に接するから、

$$x^2 = m(x - a) - 3a^2 \Leftrightarrow x^2 - mx + am + 3a^2 = 0 \dots \textcircled{1}$$

が重解をもつ。よってこの方程式の判別式を D として、

$$D = m^2 - 4(am + 3a^2) = 0 \quad \therefore (m + 2a)(m - 6a) = 0$$

$a > 0, m > 0$ より、

$$m = 6a$$

よって、 l は

$$y = 6ax - 9a^2 \dots (\text{答})$$

(2) Q の x 座標は $m = 6a$ のときの方程式①の重解で、

$$x = \frac{m}{2} = 3a \quad \therefore Q(3a, 9a^2) \dots (\text{答})$$

【(1)と(2)の(別解)】

(1) $y = x^2$ について、 $y' = 2x$ だから、 $x = t$ における、 C の接線は

$$y = 2t(x - t) + t^2 \quad \therefore y = 2tx - t^2$$

これが $P(a, -3a^2)$ を通るとき、

$$-3a^2 = 2ta - t^2 \Leftrightarrow t^2 - 2at - 3a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + a)(t - 3a) = 0$$

$a > 0$ で、傾き $2t$ が正であることから

$$t = 3a$$

よって、 l は

$$y = 6ax - 9a^2 \dots (\text{答})$$

(2) (1)の過程により、

$$Q(3a, 9a^2) \dots (\text{答})$$

(3) l と x 軸の交点の x 座標は

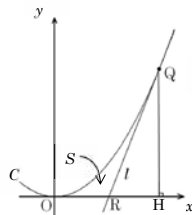
$$0 = 6ax - 9a^2 \quad \therefore x = \frac{3}{2}a$$

よって、右図において、図形 OQR で、 Q から x 軸に垂線 QH を下ろすと、求める面積 S は

$$\int_0^{3a} x^2 dx - \triangle QRH$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{3a} - \frac{1}{2} \left(3a - \frac{3}{2}a \right) \cdot 9a^2 = 9a^3 - \frac{27a^3}{4}$$

$$= \frac{9a^3}{4} \dots (\text{答})$$



[II]

解答

①	$t^2 - 2$	②	6	③	11	④	3
⑤	$\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$	⑥	$\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$				

[III]

解答

①	-3	②	1, 9	③	9	④	-6
⑤	6	⑥	$t \geq 6$	⑦	$t > \frac{25}{4}$		

〔Ⅰ〕

解答

①	4	②	6	③	9	④	3
⑤	2	⑥	7	⑦	$-\sqrt{13}+7$		

〔Ⅱ〕

解答

①	$1-s$	②	$1+t$	③	$t(1-s)$	④	$s(1+t)$
⑤	$\left(\frac{1}{4}, 8\right), \left(\frac{1}{5}, 2\right)$						

〔Ⅲ〕

$$(1) \quad \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3(k+1)-2} \right\}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} &= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{298} - \frac{1}{301}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{301}\right) = \frac{100}{301} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \right) + \dots + \left\{ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(3) \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\} \end{aligned}$$

$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} > 0$ であるから, すべての自然数 n に対して, $S_n < \frac{1}{18}$

また,

$$S_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} \right) = \frac{19}{360} > \frac{19}{361} = \frac{1}{19}$$

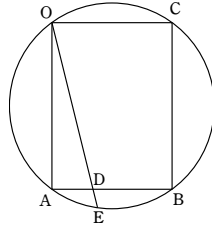
であるから, $m \geq 19$ のときは, $S_n \geq \frac{1}{m}$ となる n が存在する。

したがって, すべての自然数 n に対して $S_n < \frac{1}{m}$ を満たす最大の m は 18 … (答) である。

[I]

(1)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$



(2)

△OAB, △OADにおいて
 それぞれ三平方の定理を用いて

$$OB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, OD = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

またBD = 2だから,

△OBDにおいて余弦定理を用いることにより

$$\begin{aligned} \cos \angle BOD &= \frac{OB^2 + OD^2 - BD^2}{2OB \times OD} \\ &= \frac{25 + 17 - 4}{2 \times 5 \times \sqrt{17}} = \frac{19}{85} \sqrt{17} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

弦AB, 弦OEに対して方べきの定理を用いると

$$OD \times DE = AD \times DB \text{ より, } DE = \frac{AD \times DB}{OD} = \frac{2}{17} \sqrt{17}$$

よってOD : OE = $\sqrt{17} : \frac{19}{17} \sqrt{17} = 1 : \frac{19}{17}$ となるから

$$\overrightarrow{OE} = \frac{19}{17} \overrightarrow{OD} = \frac{19}{17} \vec{a} + \frac{19}{51} \vec{c} \quad \dots (\text{答})$$

【(3) OEの求め方についての別解】

△OBEにおいてOBは外接円の直径となるので∠OEB = 90°だから

$$OE = OB \times \cos \angle BOD = 5 \times \frac{19}{85} \sqrt{17} = \frac{19}{17} \sqrt{17}$$

[II]

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\sqrt{2}$	$\frac{t^2 - 1}{2}$	$\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t$	1	$-\sqrt{2}$	$\frac{4}{3}\sqrt{2} + 1$	$\frac{5}{4}\pi$

[III]

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
15	33	1683	46	2318	1035	13

〔Ⅰ〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\frac{1}{2}$	2	-3	-3	1	$\frac{15}{4}$	3

〔Ⅱ〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\sqrt{5}a$	$\sqrt{5}-2$	$\sqrt{5}+2$	-2	$\frac{a^2+3}{2a}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

〔Ⅲ〕

Aの1回目と2回目のさいころの目を a_1, a_2 、Bの1回目と2回目のさいころの目を b_1, b_2 とおく。

(1) $k=11$ とすると、Aが2回目のさいころを投げて勝つのは

b_1 は任意、 $a_1 + a_2 \geq 11$ より $(a_1, a_2) = (5, 6), (6, 5), (6, 6)$

となるときだから、求める確率は $\frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$ …(答)

(2) $k=6$ とすると、Bが2回さいころを投げて勝負がついていないのは

$a_1 + a_2, b_1 + b_2$ がともに5以下

となるときで、このような目の出方は

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)$

の10通りずつあるから、求める確率は $\frac{10 \times 10}{6^4} = \frac{25}{324}$ …(答)

(3) $k=6$ とすると、Bが2回さいころを投げてBが勝つのは

$a_1 + a_2 \leq 5$ 、 $b_1 \leq 5$ かつ $b_1 + b_2 \geq 6$

となるときで、(2)より (a_1, a_2) は10通り。

(b_1, b_2) は

$b_1 = 1$ のとき $b_2 = 5, 6$

$b_1 = 2$ のとき $b_2 = 4, 5, 6$

$b_1 = 3$ のとき $b_2 = 3, 4, 5, 6$

$b_1 = 4$ のとき $b_2 = 2, 3, 4, 5, 6$

$b_1 = 5$ のとき b_2 は任意

より、 $2+3+4+5+6=20$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{10 \times 20}{6^4} = \frac{25}{162}$ …(答)

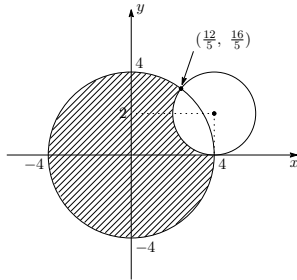
以上

〔 I 〕

(1) $x^2 + y^2 - 16 \leq 0$ は、原点 $(0, 0)$ を中心とし、半径 4 の円の周および内部を表す。
 一方、

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 \geq 0 \iff (x-4)^2 + (y-2)^2 \geq 4$$

なので、 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 \geq 0$ は、点 $(4, 2)$ を中心として、半径 2 の円周および外部を表す。これらの共通部分を図示すれば、下図の斜線部（境界を含む）のようになる。



2つの円の交点は、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 16 = 0 \\ 8x + 4y - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + (-2x+8)^2 - 16 = 0 \\ y = -2x + 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4, \frac{12}{5} \\ y = -2x + 8 \end{cases}$$

より、 $A(4, 0)$ 、 $B\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ の2点である。

(2) $x + y$ の変域は、直線 $x + y = k$ が領域 D と共有点を持つ k の範囲と一致する。

k は直線 $x + y = k$ の y 切片であることに注意すれば、直線 $x + y = k$ が点 B を通るときに k が最大となることが分かり、その値は

$$k = \frac{12}{5} + \frac{16}{5} = \frac{28}{5} \dots (\text{答})$$

これが $x + y$ の最大値である。

一方、最小となるのは直線が第3象限において円 $x^2 + y^2 - 16 = 0$ と接するときである。このとき、

$$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4 \text{ かつ } k < 0 \quad \therefore k = -4\sqrt{2} \dots (\text{答})$$

これが $x + y$ の最小値である。

〔 II 〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$6x^2 + 6x - 12$	$24x + 83$	-2	1	22	$\frac{9}{2}$	$\frac{241}{2}$

〔 III 〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥
3	8	$\sqrt{7}$	$\frac{5\sqrt{7}}{14}$	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	$6\sqrt{3}$

〔 I 〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥
$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	x^2-3x-2	3	11	3	2

〔 II 〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$-a$	$a+2$	x^2-a^2-2a	$-x^2+4x+a^2+2a$	$-2a$	$2a+4$	a^2+2a+4

〔 III 〕

(1) $\vec{OA} = (-2, 4)$, $\vec{OB} = (2\sqrt{3}-1, t)$ なので,

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -2(2\sqrt{3}-1) + 4t = 4t - 4\sqrt{3} + 2 \dots (\text{答})$$

(2) $|\vec{OA}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ なので, $\triangle OAB$ が正三角形のとき,

$$4t - 4\sqrt{3} + 2 = 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \quad \therefore t = 2 + \sqrt{3} \dots (\text{答})$$

このとき,

$$\vec{OB} = (2\sqrt{3}-1, 2+\sqrt{3}) \quad \therefore |\vec{OB}| = 2\sqrt{5}$$

なので, $\triangle OAB$ は確かに正三角形になる。

(3) 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが O, A, B を通る条件は, $a \neq 0$ かつ,

$$\begin{cases} 0 = c \\ 4 = 4a - 2b + c \\ 2 + \sqrt{3} = (2\sqrt{3}-1)^2 a + (2\sqrt{3}-1)b + c \end{cases}$$

である。これを連立して解けば,

$$a = \frac{5\sqrt{3}}{11} (\neq 0), \quad b = \frac{10\sqrt{3}}{11} - 2, \quad c = 0 \dots (\text{答})$$

(4) (3) の放物線と直線 OA は, $x = 0, -2$ において交わるので,

$$S = a \int_{-2}^0 \{x - (-2)\}(0-x) dx = \frac{a}{6} \{0 - (-2)\}^3 = \frac{20\sqrt{3}}{33} \dots (\text{答})$$

[I]

(1) $C_1: y = x^3 + ax^2$, $C_2: y = bx^2 + abx$ を連立して

$$x^3 + ax^2 - (bx^2 + abx) = 0 \Leftrightarrow x^3 + (a-b)x^2 - abx = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+a)(x-b) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

C_1 と C_2 の共有点の x 座標は $\textcircled{1}$ の実数解であり、 $\textcircled{1}$ は $x=0$, $-a$, b を解にもつが、 $a > 0$, $b > 0$ より、 $-a < 0 < b$ 。したがって、 $\textcircled{1}$ は異なる 3 つの実数解をもち、 C_1 と C_2 は異なる 3 つの共有点をもつ。

(2) (1) の過程により、

$$-a < x < 0 \quad \text{において} \quad x^3 + ax^2 > bx^2 + abx$$

$$0 < x < b \quad \text{において} \quad x^3 + ax^2 < bx^2 + abx$$

で、図のようになる。

よって、

$$S_1 - S_2$$

$$= \int_{-a}^0 (x^3 + ax^2 - (bx^2 + abx)) dx$$

$$- \int_0^b (bx^2 + abx - (x^3 + ax^2)) dx$$

$$= \int_{-a}^0 (x^3 + ax^2 - (bx^2 + abx)) dx$$

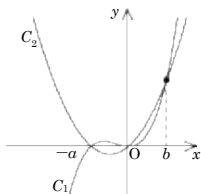
$$+ \int_0^b (x^3 + ax^2 - (bx^2 + abx)) dx$$

$$= \int_{-a}^b (x^3 + (a-b)x^2 - abx) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{a-b}{3}x^3 - \frac{ab}{2}x^2 \right]_{-a}^b$$

$$= \frac{1}{12}(a-b)(a+b)^3$$

したがって、 $S_1 = S_2$ すなわち $S_1 - S_2 = 0$ となるのは、 $a > 0$, $b > 0$ より $a = b$ のときのみである。



[II]

(1) $k = \sqrt[3]{n + \sqrt{n^2 + 1}} + \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2 + 1}}$ のとき、

$$\alpha = \sqrt[3]{n + \sqrt{n^2 + 1}}, \quad \beta = \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2 + 1}}$$

とおくと、

$$\alpha + \beta = k, \quad \alpha\beta = \sqrt[3]{-1} = -1, \quad \alpha^3 + \beta^3 = 2n$$

であるから、 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ より、

$$2n = k^3 + 3k \quad \therefore k^3 + 3k - 2n = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

したがって、 k は 3 次方程式 $x^3 + 3x - 2n = 0$ の実数解である。

$$x^3 + 3x - 2n = (x-k)(x^2 + kx + 3 + k^2) + k^3 + 3k - 2n$$

$$= (x-k) \left\{ \left(x + \frac{k}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}k^2 + 3 \right\} \quad (\because \textcircled{1})$$

$\left(x + \frac{k}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}k^2 + 3 = 0$ を満たす実数 x は存在しないので、 $x = k$ は $x^3 + 3x - 2n = 0$ のただひとつの実数解である。

(2) $5\sqrt{13} = \sqrt{5^2 \times 13} = \sqrt{325} = \sqrt{18^2 + 1}$ であるから、(1)より、 $\sqrt[3]{18 + 5\sqrt{13}} + \sqrt[3]{18 - 5\sqrt{13}}$ は 3 次方程式 $x^3 + 3x - 36 = 0$ のただひとつの実数解である。

$$x^3 + 3x - 36 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left\{ \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{39}{4} \right\} = 0$$

したがって、

$$\sqrt[3]{18 + 5\sqrt{13}} + \sqrt[3]{18 - 5\sqrt{13}} = 3 \quad \cdots \text{(答)}$$

(3) $\textcircled{1} \Leftrightarrow 2n = k(k^2 + 3)$

$k^2 + 3 > 2$ であるから、 k が整数、 n が素数のとき、

$$k = 1 \quad \text{かつ} \quad k^2 + 3 = 2n \quad \therefore n = 2$$

または、

$$k = 2 \quad \text{かつ} \quad k^2 + 3 = n \quad \therefore n = 7$$

以上により、

$$n = 2, 7 \quad \cdots \text{(答)}$$

〔Ⅲ〕

解答

①	13	②	$\frac{17}{25}$	③	$\frac{81}{125}$	④	$\frac{104}{625}$
⑤	$\frac{48}{625}$						

〔Ⅳ〕

解答

①	2	②	3	③	-4	④	3
⑤	1	⑥	7				

〔I〕

(1) $t^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$

より $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$ だから

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) \\ &= t^3 - \frac{3}{2}(t^2 - 1)t = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t \end{aligned}$$

となるので、 y を t で表すと

$$y = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t - |t| = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t & (t < 0) \\ -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t & (t \geq 0) \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$

(2) 三角関数の合成より

$$t = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

とすると $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$ より $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ である。

よって、 t のとり得る値の範囲は $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ … (答)

(3) $-1 < t < 0$ のとき $y' = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{2}$ より

t	-1	...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...	$\sqrt{2}$
y'	+		+		0		-
y		↗	↘	↗	極大	↘	

$y' > 0$, $0 < t < \sqrt{2}$ のとき $y' = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2} = 0$ と

すると $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ より y の増減の変化は右の表の

ようになり、

$$t = -1 \text{ のとき } y = -2, \quad t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき } y = \frac{\sqrt{3}}{9}, \quad t = \sqrt{2} \text{ のとき } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。

よって、 y の最大値は $\frac{\sqrt{3}}{9}$ 、最小値は -2 … (答)

〔II〕

(1) $\log_{10} 2^{2025} = 2025 \times \log_{10} 2 = 609.525$ より

$$609 < \log_{10} 2^{2025} < 610 \Leftrightarrow 10^{609} < 2^{2025} < 10^{610}$$

よって、 2^{2025} は 10 進法で 610 桁の整数である。 … (答)

また、 $2^{2025} = a \times 10^{609}$ ($1 \leq a < 10$) とおき、常用対数をとると

$$\log_{10} 2^{2025} = \log_{10} (a \times 10^{609}) \Leftrightarrow \log_{10} a = 0.525$$

$$\log_{10} 3 = 0.4771\dots, \log_{10} 4 = 0.6020\dots \text{ より } \log_{10} 3 < \log_{10} a < \log_{10} 4 \quad \therefore 3 < a < 4$$

よって、最高位の数字は 3 である。 … (答)

(2) 二項定理より

$$2^{2025} = (2^2)^{1012} + (-1)$$

$$= (33-1)^{1012} = \sum_{k=0}^{1012} {}^{1012}C_k \times 33^{1012-k} \times (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{1012} {}^{1012}C_k \times 33^{1012-k} \times (-1)^k + (-1)^{1012}$$

$0 \leq k \leq 1012$ のとき ${}^{1012}C_k \times 33^{1012-k} \times (-1)^k$ は 33 の倍数となるので

$$\sum_{k=0}^{1012} {}^{1012}C_k \times 33^{1012-k} \times (-1)^k = 33m \quad (m \text{ は整数}) \text{ とおくと}$$

$$2^{2025} = 33m - 1 = 33(m-1) + 32$$

と表されるので、 2^{2025} を 33 で割った余りは 32 である。 … (答)

〔III〕

解答

①	②	③	④	⑤
$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{119}{216}$

[IV]

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\frac{x}{6} + \frac{y}{3}$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{6}$	19	3	(10,9)	(8,11)

[I]

(1) $y = 4ax + b$ …①, $y = x^2 - 12x + 21$ …②, $y = -4x^2 + 8x - 4$ …③

①, ②の共有点の個数が0または1より

$x^2 - 12x + 21 = 4ax + b$ として $x^2 - 2(2a+6)x - b + 21 = 0$ の判別式について

$(2a+6)^2 - 21 + b \leq 0 \therefore b \leq -4a^2 - 24a - 15$ …④

①, ③についても同様に

$-4x^2 + 8x - 4 = 4ax + b$ として $4x^2 + 2(2a-4)x + b + 4 = 0$ の判別式について

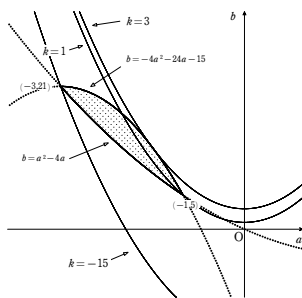
$(2a-4)^2 - 4(b+4) \leq 0 \therefore b \geq a^2 - 4a$ …⑤

④, ⑤より領域 D は2つの放物線 $b = -4a^2 - 24a - 15$, $b = a^2 - 4a$ に囲まれた部分になる。

交点は $-4a^2 - 24a - 15 = a^2 - 4a$ として $(a+1)(a+3) = 0$ より $(-1, 5)$, $(-3, 21)$ となるので、求める面積は

$$\int_{-3}^{-1} (-4a^2 - 24a - 15 - a^2 + 4a) da$$

$$= \left[-\frac{5}{3}a^3 - 10a^2 - 15a \right]_{-3}^{-1} = \frac{20}{3} \dots (\text{答})$$



(2) $b - 4a^2 = k$ とおくと $b = 4a^2 + k$ …⑥

⑥の表す放物線が領域 D と共有点をもつとき、 k のとり得る範囲を調べる。

⑥が④の境界と接するとき、

$-4a^2 - 24a - 15 = 4a^2 + k$ として $8a^2 + 24a + k + 15 = 0$ の判別式について $12^2 - 8(k+15) = 0 \therefore k = 3$

⑥が $(-1, 5)$ を通るとき、 $k = 1$

⑥が $(-3, 21)$ を通るとき、 $k = -15$

したがって、グラフより k のとり得る範囲は $-15 \leq k \leq 3$, すなわち $-15 \leq b - 4a^2 \leq 3$ … (答)

[II]

(1) $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$ の両辺を $(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)} = \frac{a_n}{(n+1)n}$$

よって、数列 $\left\{ \frac{a_n}{(n+1)n} \right\}$ は定数となるので

$\frac{a_n}{(n+1)n} = \frac{a_1}{2 \cdot 1}$ より $a_n = n(n+1)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) … (答)

$n \geq 2$ のとき、階差数列の公式より

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+2} = 8 + \frac{8(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+2}$$

$n=1$ とすると $2^2 = 8$ より b_1 と一致する。

$\therefore b_n = 2^{n+2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) … (答)

(2) $I_n = \{x | n(n+1) \leq x \leq 2^{n+2}\}$, $I_{n+1} = \{x | (n+1)(n+2) \leq x \leq 2^{n+3}\}$

$n(n+1) < (n+1)(n+2)$, $2^{n+2} < 2^{n+3}$ より $I_n \cap I_{n+1} = \{x | (n+1)(n+2) \leq x \leq 2^{n+2}\}$

となるので、 $(n+1)(n+2) \leq 2^{n+2}$ …①が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

(i) $n=1$ のとき、左辺 $= 2 \cdot 3 = 6$, 右辺 $= 2^2 = 8$ より①が成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき $(k+1)(k+2) \leq 2^{k+2}$ が成り立つと仮定すると

$$2^{k+3} - (k+2)(k+3) \geq 2(k+1)(k+2) - (k+2)(k+3) = (k+2)(k-1)$$

$k \geq 1$ より $k-1 \geq 0$ だから $(k+2)(2k-1) \geq 0$

よって、 $n=k+1$ のとき①が成り立つ。

(i), (ii) よりすべての自然数について①が成り立つ。

よって、 $I_n \cap I_{n+1}$ は少なくとも1つの実数を含むので空集合ではない。(証明終わり)

[III]

解答

①	②	③	④	⑤	⑥
33	1683	7	40	24	468

[IV]

解答

①	②	③	④
3	p	$-q$	$-2p+9$
⑤	⑥	⑦	⑧
$-9p-3q+27$	-6	8	$(-2, 1, 4)$

〔 I 〕

(1) 正六角形 ABCDEF の外接円の中心を O とする。 $\vec{AO} = \vec{AB} + \vec{AF} = \vec{b} + \vec{f}$ なので、

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AO} = \vec{b} + (\vec{b} + \vec{f}) = 2\vec{b} + \vec{f} \dots (\text{答})$$

$$\vec{AD} = 2\vec{AO} = 2(\vec{b} + \vec{f}) = 2\vec{b} + 2\vec{f} \dots (\text{答})$$

(2) $\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM} = (2\vec{b} + \vec{f}) + t\vec{f} = 2\vec{b} + (1+t)\vec{f} \dots (\text{答})$

(3) $\vec{AP} = s\vec{AM} = 2s\vec{b} + s(1+t)\vec{f}$ とおくと、

$$\vec{BP} = \vec{AP} - \vec{AB} = (2s-1)\vec{b} + s(1+t)\vec{f}$$

BP ⊥ AM なので、

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{BP} \cdot \vec{AM} \\ &= \{(2s-1)\vec{b} + s(1+t)\vec{f}\} \cdot \{2\vec{b} + (1+t)\vec{f}\} \\ &= 2(2s-1)|\vec{b}|^2 + s(1+t)^2|\vec{f}|^2 + (4s-1)(1+t)(\vec{b} \cdot \vec{f}) \end{aligned}$$

ここで、ABCDEF が一辺の長さが 1 の正六角形なので、

$$|\vec{b}| = |\vec{f}| = 1, \quad \vec{b} \cdot \vec{f} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$

したがって、

$$2(2s-1) + s(1+t)^2 - \frac{1}{2}(4s-1)(1+t) = 0 \quad \therefore s = \frac{3-t}{2(t^2+3)}$$

よって、

$$\vec{AP} = \frac{3-t}{t^2+3}\vec{b} + \frac{(3-t)(1+t)}{2(t^2+3)}\vec{f} \dots (\text{答})$$

(4) AP : PM = 5 : 9 のとき、 $s = \frac{5}{14}$ なので、

$$\frac{3-t}{2(t^2+3)} = \frac{5}{14} \quad \therefore (5t-3)(t+2) = 0$$

$t > 0$ なので、 $t = \frac{3}{5} \dots (\text{答})$

〔 II 〕

(1) x, y, z は、 $x > 0, y > 0, z > 0$ であり、

$$xy + yz + zx = 7, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 11$$

を満たす。よって、

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) = 11 + 14 = 25$$

$x+y+z > 0$ なので、

$$x+y+z = 5 \quad \therefore y+z = 5-x \dots (\text{答})$$

また、

$$yz = 7 - x(y+z) = 7 - x(5-x) = x^2 - 5x + 7 \dots (\text{答})$$

(2) (1) の結論より、 y, z は t の 2 次方程式

$$t^2 - (5-x)t + x^2 - 5x + 7 = 0$$

の 2 解である。したがって、この方程式が正の 2 解を持つ $x (> 0)$ の範囲を求めればよい。すなわち、

$$5-x > 0 \text{ かつ } x^2 - 5x + 7 > 0 \text{ かつ } (5-x)^2 - 4(x^2 - 5x + 7) \geq 0$$

より、 $\frac{1}{3} \leq x \leq 3 \dots (\text{答})$

(3) 直方体の体積 $V \text{ cm}^3$ は x の関数として、

$$V(x) = xyz = x(x^2 - 5x + 7) = x^3 - 5x^2 + 7x \quad \left(\frac{1}{3} \leq x \leq 3\right)$$

と与えられる。

x	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{7}{3}$	3
$\frac{dV}{dx}$	+	0	-	+
V	\nearrow	3	\searrow	\nearrow

より増減表は右ようになる。

$V(1) = V(3) = 3$ なので、 $x = 1, 3$ のとき、直方体の体積は最大値 $3 \text{ cm}^3 \dots (\text{答})$ をとる。

$x = 1$ のとき、 $t^2 - 4t + 3 = 0$ を解いて、 $(y, z) = (1, 3), (3, 1)$ であり、 $x = 3$ のとき、 $t^2 - 2t + 1 = 0$ を解いて、 $(y, z) = (1, 1)$ であるから、体積が最大となるとき、

$$(x, y, z) = (1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1) \dots (\text{答})$$

〔 III 〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
10	16	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	11

〔 IV 〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
k	k^3	$3k$	$-3k^3$	$6k$	$9k^2$	$9k^2$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}k^2$

〔I〕

(1) $f(x) = x^2 e^{-2x}$ について、第1次導関数 $f'(x)$ 、第2次導関数 $f''(x)$ は

$$f'(x) = (-2x^2 + 2x)e^{-2x} = -2x(x-1)e^{-2x} \dots (\text{答})$$

$$f''(x) = \{(-4x+2) + (4x^2-4x)\}e^{-2x} = 2(2x^2-4x+1)e^{-2x} \dots (\text{答})$$

(2) $2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

であるから、(1)より、 $f(x)$ の増減及び曲線 $y = f(x)$ の凹凸は、下表のようになる。

x	...	0	...	$1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$...	1	...	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗		↗	極大	↘		↘

したがって、変曲点の x 座標は

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \dots (\text{答})$$

また、 $x = -t$ とおくと、 $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ で

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(-t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{2t} = \infty$$

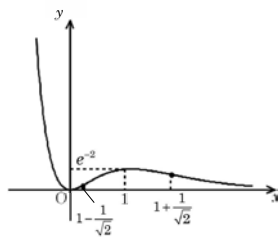
$x > 0$ のとき、 $e^{-2x} < \frac{1}{x^3}$ であるから、

$$0 < x^2 e^{-2x} < x^2 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x}$$

で、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ であるから、はさみうちの原理により、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

したがって、 $y = f(x)$ のグラフの概形は、下図のようになる。



(3) $\int x^2 e^{-2x} dx = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)e^{-2x} + C$ (C は積分定数)

であるから、

$$S(a) = \int_0^a x^2 e^{-2x} dx = \left[-\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)e^{-2x} \right]_0^a = -\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{4} + \frac{1}{4}\right)e^{-2a} + \frac{1}{4}$$

$a > 0$ より、 $e^{-2a} < \frac{1}{a^3}$ であるから、

$$0 < \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{4} + \frac{1}{4}\right)e^{-2a} < \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{4} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{a^3} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{4a^3}$$

で、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{4a^3}\right) = 0$$

だから、はさみうちの原理により、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{4} + \frac{1}{4}\right)e^{-2a} = 0$$

したがって、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S(a) = \frac{1}{4} \dots (\text{答})$$

〔II〕

解答

①	$\frac{1}{3}$	②	$\frac{2}{3}$	③	$\frac{3}{10}$	④	$\frac{3}{5}$
⑤	$(n-x)(n-x-1)$	⑥	$\frac{n(n-1)}{2}$	⑦	7		

〔Ⅲ〕

円 $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ について、中心をそれぞれ、

$O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$

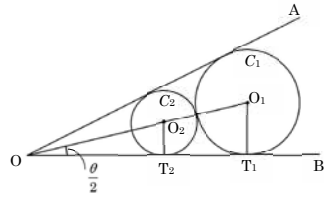
半直線 OB との接点を

$T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$

半径を

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$

とする。



(1) $r_1 = O_1T_1 = OO_1 \sin \frac{\theta}{2} = 1 \cdot \sin \frac{\theta}{2} = t \dots$ (答)

$r_2 = O_2T_2 = OO_2 \sin \frac{\theta}{2} = \{1 - (t + r_2)\} \cdot t = t - t^2 - r_2t$

$\therefore r_2 = \frac{t-t^2}{1+t} \dots$ (答)

(2) $r_n = OO_n \sin \frac{\theta}{2}$

であるから、

$OO_n = \frac{r_n}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{r_n}{t}$

同様に、

$OO_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{t}$

したがって、

$r_n + r_{n+1} = OO_n \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{t}(r_n - r_{n+1}) \quad \therefore r_{n+1} = \frac{1-t}{1+t} r_n$

よって、数列 $\{r_n\}$ は公比 $\frac{1-t}{1+t}$ の等比数列だから、

$r_n = r_1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{n-1} = t \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{n-1} \dots$ (答)

(3) (2)より、

$S_n = \pi r_n^2 = \pi t^2 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{2(n-1)}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < t < 1$ だから、 $0 < \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2 < 1$ 。よって、

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi t^2}{1 - \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2} = \frac{\pi t^2 (1+t)^2}{(1+t)^2 - (1-t)^2} = \frac{\pi t (1+t)^2}{4} \dots$ (答)

(4) (3)の結果に $t = \sin \frac{\theta}{2}$ を用いて、

$\frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{\pi \sin \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2}{4\theta} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \cdot \left(1 + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2$

したがって、

$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{\pi}{8} \cdot 1 \cdot (1+0)^2 = \frac{\pi}{8} \dots$ (答)

〔Ⅳ〕

解答

①	$6\sqrt{3}$	②	-2	③	3	④	$2\log x + 1$
⑤	$-\frac{1}{2e}$	⑥	-1	⑦	-2		

〔Ⅰ〕

(1)

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \log x = \frac{1 - \log x}{x^2} = 0 \text{ とすると } x = e$$

より $f(x)$ の増減の変化は右の通り。

これより $f(x)$ は $x = e$ のとき極大かつ最大となるので

最大値 $f(e) = \frac{1}{e}$ をとる。…(答)

x	0	…	e	…
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	極大	↘

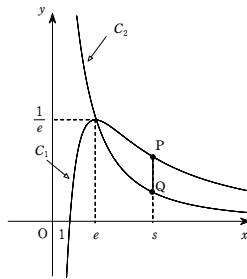
(2)

$$\frac{\log x}{x} = \frac{1}{x} \text{ とすると } \log x = 1 \text{ より}$$

$$x = e \text{ …(答)}$$

また、(1)の増減表より C_1, C_2 の概形は右図に示した2つの曲線である。

(なお、右図には線分PQなども記載し、(3)と共有している。)



(3)

右図のPQの長さを $h(s)$ とおくと

$$h(s) = f(s) - g(s) = \frac{\log s - 1}{s} \quad (s > e)$$

と表される。

$$h'(s) = \frac{2 - \log s}{s^2} = 0 \text{ とすると } s = e^2 \text{ であり、} h'(s) \text{ の符号は } s = e^2 \text{ の前後で正から負へ変化するの}$$

で、 $PQ = h(s)$ は $s = e^2$ のとき最大値 $h(e^2) = \frac{1}{e^2}$ をとる。…(答)

(4)

$C_1, C_2, x = t$ で囲まれる図形の面積が2であるとすると

(i) $0 < t < e$ のとき

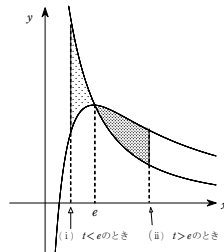
$t \leq x \leq e$ において $f(x) \leq g(x)$ より

$$\int_t^e \{g(x) - f(x)\} dx = \int_t^e \left\{ \frac{1}{x} - \log x \times (\log x) \right\} dx$$

$$= \left[\log x - \frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_t^e = \frac{1}{2} - \log t + \frac{1}{2} (\log t)^2 = 2$$

$$\therefore (\log t + 1)(\log t - 3) = 0$$

$$\log t < 1 \text{ より } \log t = -1 \quad \therefore t = \frac{1}{e}$$



(ii) $t > e$ のとき

$e \leq x \leq t$ において $g(x) \leq f(x)$ より

$$\int_e^t \{f(x) - g(x)\} dx = \frac{1}{2} - \log t + \frac{1}{2} (\log t)^2 = 2$$

$$\therefore (\log t + 1)(\log t - 3) = 0$$

$$\log t > 1 \text{ より } \log t = 3 \quad \therefore t = e^3$$

以上より、 $t = \frac{1}{e}, e^3$ …(答)

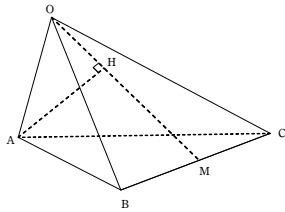
〔Ⅱ〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$3^{n-1}(3n-2)$	5	81	3^{t-1}	$\frac{1}{2}(3^t-1)$	$\frac{1}{3^t}$	$\frac{3^{t-1}-3}{3^{t-1}-1}$

〔Ⅲ〕

(1)
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 4 \cos 60^\circ = 6 \quad \dots$ (答)
 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 4 \times 5 \cos 60^\circ = 10 \quad \dots$ (答)
 $\vec{c} \cdot \vec{a} = 5 \times 3 \cos 60^\circ = \frac{15}{2} \quad \dots$ (答)



(2) AH ⊥ OB より
 $\overline{AH} \cdot \overline{OB} = (p\vec{b} + q\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = p|\vec{b}|^2 + q\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}$
 $= 16p + 10q - 6 = 0 \quad \therefore 8p + 5q = 3 \quad \dots$ ①
 AH ⊥ OC より $\overline{AH} \cdot \overline{OC} = 0$ から $4p + 10q = 3 \quad \dots$ ②
 ①, ②より, $p = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{5} \quad \dots$ (答)

(3)
 $|\overline{OH}|^2 = \left| \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} \right|^2 = \frac{1}{16}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{10}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{25}|\vec{c}|^2 = 3 \quad \therefore OH = \sqrt{3} \quad \dots$ (答)

また, $\overline{OH} \cdot \overline{OB} = \left(\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} \right) \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{5}\vec{b} \cdot \vec{c} = 6$ より $\cos \angle BOH = \frac{\overline{OH} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OH}| |\overline{OB}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{OH} \cdot \overline{OC} = \left(\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} \right) \cdot \vec{c} = \frac{1}{4}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{5}|\vec{c}|^2 = \frac{15}{2}$ より $\cos \angle COH = \frac{\overline{OH} \cdot \overline{OC}}{|\overline{OH}| |\overline{OC}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\cos \angle BOH = \cos \angle COH$
 よって, $0^\circ < \angle BOH < 180^\circ, 0^\circ < \angle COH < 180^\circ$ より $\angle BOH = \angle COH$ が成り立つ。(証明終わり)

(4)
 $\overline{OM} = k\overline{OH} = \frac{k}{4}\vec{b} + \frac{k}{5}\vec{c}$ とおくと M は BC 上の点より $\frac{k}{4} + \frac{k}{5} = \frac{9}{20}, k = 1 \quad \therefore k = \frac{20}{9}$
 ∴ $OH : OM = 1 : k = 9 : 20 \quad \dots$ (答)
 このとき, $OM : HM = 20 : (20 - 9) = 20 : 11$ となるので, 三角形 HBC の面積は
 $\frac{11}{20} \times \triangle OBC = \frac{11}{20} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \sin 60^\circ = \frac{11\sqrt{3}}{4}$
 三角形 OAH において三平方の定理より $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{6}$
 したがって, 四面体 ABCH の体積は,
 $V = \frac{1}{3} \times \frac{11\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{6} = \frac{11\sqrt{2}}{4} \quad \dots$ (答)

〔Ⅳ〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
(3, -1)	$\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$	4	$-\frac{4}{5}$	12	$-\frac{1}{64}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

〔Ⅰ〕

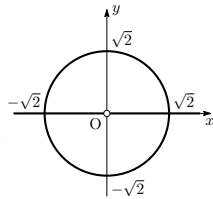
(1) $z = x + yi \neq 0$ のとき、

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \quad \therefore z + \frac{2}{z} = \left(x + \frac{2x}{x^2 + y^2}\right) + \left(y - \frac{2y}{x^2 + y^2}\right)i$$

なので、 $z + \frac{2}{z}$ が実数となる条件は、

$$y - \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{すなわち、}(y = 0 \text{ かつ } x \neq 0) \text{ または } x^2 + y^2 = 2$$

これを図示すれば、右図の太線部となる。



(2) z が正の実数のとき、相加平均と相乗平均の関係より、

$$z + \frac{2}{z} \geq 2\sqrt{z \cdot \frac{2}{z}} = 2\sqrt{2}$$

であり、 $z = \frac{2}{z}$ すなわち、 $z = \sqrt{2}$ のときに $z + \frac{2}{z} = 2\sqrt{2}$ となる。したがって、 $z + \frac{2}{z}$ の変域は $z + \frac{2}{z} \geq 2\sqrt{2}$ となる。

z が負の実数のとき、 $w = -z$ は正の実数であり、 $z + \frac{2}{z} = -\left(w + \frac{2}{w}\right)$ なので、 $z + \frac{2}{z}$ の変域は $z + \frac{2}{z} \leq -2\sqrt{2}$ となる。

以上より、 z が 0 でない実数全体を動くときの $z + \frac{2}{z}$ の変域は、

$$z + \frac{2}{z} \leq -2\sqrt{2}, \quad 2\sqrt{2} \leq z + \frac{2}{z} \quad \dots \text{ (答)}$$

(3) $z = x + yi$ が虚数であり、 $z + \frac{2}{z}$ が実数となる条件は、(1) の結論より、

$$x^2 + y^2 = 2 \text{ かつ } y \neq 0$$

である。このとき、

$$z + \frac{2}{z} = x + \frac{2x}{2} = 2x, \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

なので、

$$-2\sqrt{2} < z + \frac{2}{z} < 2\sqrt{2} \quad \dots \text{ (答)}$$

〔Ⅱ〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
0	$-\frac{9}{8}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{15}}{16}$	$-3 \leq k < -2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	-3

〔 III 〕

(1) $\vec{OQ} = \vec{OA} + \vec{AQ} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} \dots$ (答)

$\vec{OR} = \vec{OB} + \vec{BR} = \vec{b} + t(\vec{c} - \vec{b}) = (1-t)\vec{b} + t\vec{c} \dots$ (答)

(2) $\vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP} = -\frac{1}{3}\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$, $\vec{PS} = \vec{OS} - \vec{OP} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$,

$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \left(\frac{2}{3}-s\right)\vec{a} + s\vec{b}$ なので, $\vec{PR} = p\vec{PS} + q\vec{PQ}$ のとき,

$$-\frac{1}{3}\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c} = p\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) + q\left\{\left(\frac{2}{3}-s\right)\vec{a} + s\vec{b}\right\}$$

$$\therefore \left\{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}p - \left(\frac{2}{3}-s\right)q\right\}\vec{a} + (1-t-sq)\vec{b} + \left(t - \frac{1}{3}p\right)\vec{c} = \vec{0}$$

O, A, B, C は同一平面上にないので,

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}p - \left(\frac{2}{3}-s\right)q = 1-t-sq = t - \frac{1}{3}p = 0$$

よって,

$$p = 3t, \quad q = \frac{1-t}{s} \dots$$
 (答)

であり,

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 3t - \left(\frac{2}{3}-s\right)\frac{1-t}{s} = 0 \quad \therefore s+t=1 \dots$$
 (答)

(3) H は $\triangle ABC$ の重心なので, $AH = \frac{2}{3} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。よって,

$$OH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \dots$$
 (答)

$s+t=1$ なので, $\triangle BQR$ は 1 辺の長さが $t=1-s$ の正三角形である。よって, 四面体 OQBR の体積は,

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(1-s)^2 \sin 60^\circ \times OH = \frac{\sqrt{2}}{12}(1-s)^2 \dots$$
 (答)

〔 IV 〕

解答

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$1 < x < \frac{16}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{p(p-1)}{2}$	$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$	$-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{2}{135}$