

[I]

① 30 ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{t}{3}$ ④ t ⑤ $\frac{3}{4}$ ⑥ $\pm\sqrt{3}$

[II]

① 3 ② 4 ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $4 \cdot 3^{n-2} - n$

[III]

(1) $h'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ より, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, -1$. よって, (増減表により) $h(x)$ は,

$x = -1$ のとき極大値 $1 - a$ をとり, $x = \frac{1}{3}$ のとき極小値 $-\frac{5}{27} - a$ をとる.

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は 3 個の共有点をもつ $\Leftrightarrow y = h(x)$ と x 軸は 3 個の共有点を持つ

$$\Leftrightarrow h(-1) > 0 > h\left(\frac{1}{3}\right)$$

よって, $1 - a > 0 > -\frac{5}{27} - a \Leftrightarrow -\frac{5}{27} < a < 1$.

(3) $a = 1$ のとき, $h(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) = 0$ より, $x = 1, -1$ (重解). よって, 求める面積を S とおくと,

$$S = \int_{-1}^1 h(x)dx = \int_{-1}^1 (-x^3 - x^2 + x + 1)dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}.$$

- [I] (1) $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^n (2^k - 5)$ が成り立つ. 左辺 $= a_{n+1} - a_1 = a_{n+1} - 1$ であり, 右辺 $= 2(2^n - 1) - 5n = 2^{n+1} - 5n - 2$ だから, $a_{n+1} = 2^{n+1} - 5n - 1$ となる. 従って $n \geq 2$ のとき $a_n = 2^n - 5n + 4$ だが, $a_1 = 1$ なのでこれは $n = 1$ に対しても正しい. よって $a_n = 2^n - 5n + 4$ である.

(2) (1) より

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2^k - 5k + 4) = 2(2^n - 1) - \frac{5}{2}n(n+1) + 4n = 2^{n+1} - \frac{1}{2}(5n^2 - 3n + 4)$$

である.

(3) $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = 2^{n+1} - 5n - 1$ である.

$n = 3$ のとき $S_4 - S_3 = 2^4 - 5 \cdot 3 - 1 = 0$ なので $S_4 = S_3$ とくに $S_4 \geq S_3$ が成り立つ.

3以上の k に対して $S_{k+1} \geq S_k$, すなわち $2^{k+1} \geq 5k + 1$ が成り立つと仮定する. このとき

$$\begin{aligned} S_{k+2} - S_{k+1} &= 2^{k+2} - 5(k+1) - 1 = 2 \cdot 2^{k+1} - 5k - 6 \\ &\geq 2(5k + 1) - 5k - 6 && (\because 2^{k+1} \geq 5k + 1) \\ &= 5k - 4 > 0 && (\because k \geq 3) \end{aligned}$$

なので, $S_{k+2} \geq S_{k+1}$ が成立する. よって, 数学的帰納法により, 3以上の任意の自然数 n に対して $S_{n+1} \geq S_n$ が成立する.

[II] (1) $f(x) = -x^2 + 1$ より $f'(x) = -2x$ なので, 点 $P(a, -a^2 + 1)$ における C の接線 ℓ の方程式は $y - (-a^2 + 1) = -2a(x - a)$, すなわち $\ell: y = -2ax + a^2 + 1$ である.

(2) 条件 (i) より $g(x) = b(x - c)^2$ ($-1 < c < 1$) とおける. 条件 (ii) より $-2ax + a^2 + 1 = b(x - c)^2$ の解は $x = \pm 1$ だから, $x = 1, -1$ を代入して $(1 - a)^2 = b(1 - c)^2$ かつ $(1 + a)^2 = b(1 + c)^2$ が得られる. これら 2 式から b を消去すれば $(1 + a)^2(1 - c)^2 = (1 - a)^2(1 + c)^2$ となるが, $-1 \leq a \leq 1, -1 < c < 1$ なので両辺の平方根をとれば $(1 + a)(1 - c) = (1 - a)(1 + c)$ となる. よって $c = a$ であり, このとき $b = 1$ である. 以上より, $g(x) = (x - a)^2$ である.

(3) D の頂点は $(a, 0)$ だから点 $P(a, -a^2 + 1)$ との距離は $|f(a) - 0| = 1 - a^2$ であり, 明らかに $a = 0$ のとき最大となる. このとき, 2 曲線の共有点の x 座標は $-x^2 + 1 = x^2$ より $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ なので, 面積は

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \{(-x^2 + 1) - x^2\} dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1 - 2x^2) dx = 2 \left[x - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

である.

[III] ① $\frac{8}{9}$, ② $\frac{7}{9}$, ③ $\frac{1}{9}$, ④ $\frac{13}{18}$, ⑤ $\frac{1}{3}$

[IV] ① 2π , ② $\frac{2\pi}{5}$, ③ 2 , ④ $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, ⑤ 0 , ⑥ 3 , ⑦ $\frac{-3-\sqrt{5}}{4}$

[I]

- ① $(9, 16)$ ② $(-16, -9)$ ③ $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ ④ $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ ⑤ $1 + 2i$ ⑥ $-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$
⑦ $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i$

[II]

- ① $3x^2 - 6$ ② $-6x + a + 6$ ③ $a > \frac{3}{4}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ -3 ⑥ $\frac{3}{2}$

[III]

(1) $a_1 + a_2 = 6 \Leftrightarrow (a_1, a_2) = (2, 4), (3, 3), (4, 2)$. よって, $\frac{3}{4^2} = \frac{3}{16}$.

(2) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 11 \Leftrightarrow \{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{1, 2, 4, 4\}, \{1, 3, 3, 4\}, \{2, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 3, 3\}$.

よって, $\frac{2 \cdot {}_4C_2 + 2 \cdot {}_4C_2 + 2 \cdot {}_4C_2 + {}_4C_3}{4^4} = \frac{5}{32}$.

(3) $a_1 + a_2 = 6$ となる事象を A , $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 11$ となる事象を B とすると, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$

より, 求める確率は, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3/64}{5/32} = \frac{3}{10}$.

(4) A, B を (3) のものとする, 求める確率は $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$ である. ド・モルガンの法則, 余事象の確率を用いると,

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \frac{3}{16} - \frac{5}{32} + \frac{3}{64} = \frac{45}{64}.$$

〔Ⅰ〕

(1) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-3/2}(2 - \log x)$ より $a = 2, b = -1$ 。

(2) $f''(x) = \frac{1}{4}x^{-5/2}(-8 + 3\log x)$ より $f''(x) = 0$ となるのは $x = e^{8/3}$ のときである。

これを $f(x)$ に代入すると $\frac{8}{3}e^{-4/3}$ となる。よって、変曲点の座標は $\left(e^{8/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3}\right)$ となる。

(3) $f'(e^{8/3}) = -\frac{1}{3}e^{-4}$ となるので、接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{3}e^{-4}x + 3e^{-4/3} \quad (1)$$

となる。

(4) S の面積は (グラフの概形は省略)、

$$\int_1^{e^{8/3}} \left(-\frac{1}{3}e^{-4}x + 3e^{-4/3} - f(x) \right) dx \quad (2)$$

であり、これを計算すると

$$\frac{3}{2}e^{4/3} + \frac{1}{6}e^{-4} - 3e^{-4/3} - 4 \quad (3)$$

と求まる。よって、 $s = \frac{3}{2}, t = \frac{1}{6}$ となる。

〔Ⅱ〕

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ③ $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ ④ $\left(\frac{1}{2}, -2, 3\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{2}, 3, -2\right)$ ⑥ $\frac{\sqrt{53}}{2}$

〔Ⅲ〕

(1) 事象 A が起こるのは

- (a) が 3 回、(c) が 2 回 (事象 B)
- (a) が 4 回、(b) が 1 回

のときである。この確率は ${}_5C_2(1/2)^3(1/6)^2 + {}_5C_1(1/2)^4(1/3) = 5/144 + 5/48 = 5/36$ となる。このうち事象 B が起こる確率は $5/144$ であるから事象 A が起こったという条件の下で事象 B が起こる条件付確率は $(5/144)/(5/36) = 1/4$ である。

(2) 2 回の試行後に P の位置の x 座標が偶数であるのは () の中の数字はそれが起こる確率を表す)、

- (a) が 2 回 : $((1/2)^2)$
- (b) が 2 回 : $((1/3)^2)$
- (a) と (b) が 1 回ずつ (${}_2C_1(1/2)(1/3)$)
- (c) が 2 回 : $((1/6)^2)$

が起こるときであるので、問題の確率はそれらの和 $\frac{13}{18}$ となる。

(3) $n + 1$ 回施行後に P の x 座標が偶数であるのは

- n 回目にそれが偶数で (c) が起こる。
- n 回目にそれが奇数で (a) か (b) が起こる。

のいずれかであるから、

$$p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{5}{6}(1 - p_n) = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}p_n \quad (4)$$

となる。

(4) (3) の漸化式を変形すると、

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \left(p_n - \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

が得られる。 $p_1 = \frac{1}{6}$ に注意すると、

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1} \quad (6)$$

となる。これを整理すると $p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1}$ が得られる。これは $n \rightarrow \infty$ で $\frac{1}{2}$ に収束する。

数学

2月2日

全学日程1

システム理工学部

環境都市工学部

化学生命工学部

共通テスト利用入試（併用）

環境都市工学部

〔IV〕

- ① $a + b + c$ ② $a - b$ ($b - a$ も可) ③ $a = b = c$ ④ $\left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}$ ⑤ $-1 + 8i$ ⑥ $4, 8$
⑦ $0, \frac{5}{6}\pi$

[I]

① -2 ② 4 ③ -4 ④ $x^4 - 16$ ⑤ $5x + 6$ ⑥ 8 ⑦ -112

[II]

① $p(1-q)$ ② $\frac{2p(q-1)}{p+2q}$ ③ $\frac{q(p+2)}{p+2q}$ ④ $\frac{p(1-q)^2}{p+2q}$ ⑤ 4 ⑥ $\frac{9-\sqrt{33}}{8}$

[III]

(1) $\frac{5+4+3+2+1}{6^2} = \frac{5}{12}$ (2) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$

(3) 「 $Y = 4$ 」となるは, 「 $X_1 \leq 4, X_2 \leq 4, X_3 \leq 4$ 」であり, かつ「 $X_1 \leq 3, X_2 \leq 3, X_3 \leq 3$ 」ではない
ときである, よって, $\frac{4^3 - 3^3}{6^3} = \frac{37}{216}$

(4) $\sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{k^3 - (k-1)^3}{6^3} = \frac{119}{24}$

[I] (1) 余弦定理より

$$1^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{9}$$

である. このとき $\triangle OAB$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \sin \theta = \frac{9}{32} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{8}$$

となる.

(2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = \frac{9}{16}$ であり $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{16}$ である.

(3) $\vec{OH} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ とおけば, $\vec{OP} = t \vec{c}$ より $\vec{PH} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} - t \vec{c}$ である. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$ を用いれば, $\vec{PH} \perp \vec{a}, \vec{PH} \perp \vec{b}$ であることから

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{PH} \cdot \vec{a} = \alpha \vec{a} \cdot \vec{a} + \beta \vec{b} \cdot \vec{a} - t \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{9}{16} \alpha + \frac{1}{16} \beta - \frac{t}{16}, \\ 0 &= \vec{PH} \cdot \vec{b} = \alpha \vec{a} \cdot \vec{b} + \beta \vec{b} \cdot \vec{b} - t \vec{c} \cdot \vec{b} = \frac{1}{16} \alpha + \frac{9}{16} \beta - \frac{t}{16} \end{aligned}$$

となる. すなわち, $9\alpha + \beta = t$ かつ $\alpha + 9\beta = t$ だから, $\alpha = \beta = \frac{t}{10}$ である. 以上よ

り, $\vec{PH} = \frac{t}{10} \vec{a} + \frac{t}{10} \vec{b} - t \vec{c}$ となる.

(4) $|\vec{PH}|^2 = \vec{PH} \cdot \vec{PH} = \frac{t^2}{100} |\vec{a} + \vec{b}|^2 - \frac{t^2}{5} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + t^2 |\vec{c}|^2 = \frac{11}{20} t^2$ なので $|\vec{PH}| = \frac{\sqrt{55}}{10} t$ である. よって, 四面体 $OABP$ の体積は

$$\frac{1}{3} |\vec{PH}| (\triangle OAB \text{ の面積}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{55}}{10} t \cdot \frac{\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{11}}{48} t$$

となる. これが $\frac{1}{24}$ に等しいとき $t = \frac{2\sqrt{11}}{11}$ である.

[II] (1) C は 2 点 $(0, 0), (2, 0)$ を通るので $f(x) = ax(x - 2)$ とおける. このとき $f'(x) = 2ax - 2a$ だが, 条件 $f'(0) = 2$ より $a = -1$ である. よって $f(x) = -x^2 + 2x$ である. 点 $P(t, -t^2 + 2t)$ を通り傾きが -1 の直線は方程式 $y - (-t^2 + 2t) = -(x - t)$, すなわち $y = -x - t^2 + 3t$ で与えられる. これと x 軸との共有点が Q なので, $g(t) = -t^2 + 3t$ である.

(2) $g(t) = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ より $0 \leq t \leq 2$ における最大値は $\frac{9}{4}$ ($t = \frac{3}{2}$ のとき) である.

(3) $1 \leq t \leq 2$ のとき $P(t, -t^2 + 2t)$ と $Q(-t^2 + 3t)$ を結ぶ傾き -1 の線分が通過する範囲は: $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ では C と $y = -x + 2$ で囲まれた部分であり, $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$ では $y = -x + \frac{9}{4}$, $y = -x + 2$ および x 軸で囲まれた部分である. よって, 面積は

$$\int_1^{3/2} \{-x^2 + 2x - (-x + 2)\} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{23}{96}$$

である.

[III] ① $\boxed{2}$, ② $\boxed{-\frac{1}{4}}$, ③ $\boxed{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$, ④ $\boxed{\frac{1}{6}}$, ⑤ $\boxed{\frac{11}{6}}$, ⑥ $\boxed{-\frac{1}{4}}$, ⑦ $\boxed{4}$

[IV] ① $\boxed{45}$, ② $\boxed{195}$, ③ $\boxed{90}$, ④ $\boxed{70}$, ⑤ $\boxed{85}$, ⑥ $\boxed{255}$, ⑦ $\boxed{60}$,
⑧ $\boxed{\frac{3000}{13}}$

[I] $A = a + \frac{4}{a}$ とおくと, $f(x) = x^3 - (A+3)x^2 + 3Ax$ である.

(1) $f'(x) = 3x^2 - 2(A+3)x + 3A$ である. 判別式は

$$4(A+3)^2 - 36A = 4\left(A - \frac{3}{2}\right)^2 + 27 > 0$$

なので, 2次方程式 $f'(x) = 0$ は異なる2つの実数解 α, β ($\alpha < \beta$) を持つ. $f(x)$ の増減は $x < \alpha$ において $f'(x) > 0$ より増加, $\alpha < x < \beta$ において $f'(x) < 0$ より減少, $x > \beta$ において $f'(x) > 0$ より増加である. よって, $f(x)$ は $x = \alpha$ において極大値, $x = \beta$ において極小値を持つ.

(2) (1) より $M = f(\alpha)$, $m = f(\beta)$ なので

$$M - m = f(\alpha) - f(\beta) = \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx = 3 \int_{\alpha}^{\beta} (\beta - x)(x - \alpha) dx = \frac{(\beta - \alpha)^3}{2}$$

となる. 解と係数の関係より $\alpha + \beta = \frac{2}{3}(A+3)$, $\alpha\beta = A$ なので

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{4}{9}(A^2 - 3A + 9)$$

だから, $M - m = \frac{4}{27}(A^2 - 3A + 9)^{3/2}$ である. ここで, 相加平均・相乗平均の関係から $A = a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4$ (等号成立は $a = 2$ のとき) であり, この範囲で $A^2 - 3A + 9$ は単調増加である. よって, $M - m$ は $a = 2$ のとき最小値 $\frac{4}{27}(4^2 - 3 \cdot 4 + 9)^{3/2} = \frac{52}{27}\sqrt{13}$ をとる.

[II] (1) 関数 $f(t) = t^2 - t$ は $t > 1$ において単調増加である. 従って

$$n < x < n+1 \iff n^2 - n = f(n) < f(x) < f(n+1) = n^2 + n$$

が成り立つ. 条件より $f(x) = x^2 - x$ は整数なので, $n^2 - n < k < n^2 + n$ を満たす整数 k の個数が a_n に他ならない. 従って $a_n = n^2 + n - (n^2 - n) - 1 = 2n - 1$ である.

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n = n^2$ であり,

$$T_n = \sum_{k=1}^n 2^{2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 4^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{4(4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}(4^n - 1)$$

である.

[III] ① $3p^2(1-p)$, ② p^3 , ③ $\frac{1}{2}$, ④ $3p$, ⑤ $3p(1-p)$

[IV] ① $\frac{4}{9}$, ② $\frac{16}{3}$, ③ 4^n , ④ $\left(\frac{4}{9}\right)^n$, ⑤ $4\left(\frac{4}{3}\right)^n$, ⑥ 20 , ⑦ 9

[I]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{20}{23}$ ④ $\frac{15}{23}$ ⑤ 11 ⑥ 12

[II]

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ $x - \frac{\pi}{6}$ ④ $\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$ ⑤ $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{2}$

[III]

(1) 放物線の軸は y 軸となることから, $\underline{q = 0}$.

(2) 点 A(1, 2) を通ることから, $\underline{r = 2 - p}$. このとき, ℓ の方程式は, $\underline{y = 2px - 2p + 2}$

(3) $S = \int_0^1 \left\{ (2px - 2p + 2) - (px^2 + 2 - p) \right\} dx = (-p) \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = -\frac{p}{3}$.

一方, $2px - 2p + 2 = 0$ より, $x = 1 - \frac{1}{p}$, 従って, $a = 1 - \frac{1}{p}$. このとき,

$$T = \int_1^{1-\frac{1}{p}} \left\{ (2px - 2p + 2) - (px^2 + 2 - p) \right\} dx = (-p) \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_1^{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{3p^2}.$$

よって, $p < 0$ に注意すると, $-\frac{p}{3} = \frac{1}{3p^2} \Leftrightarrow \underline{p = -1}$.

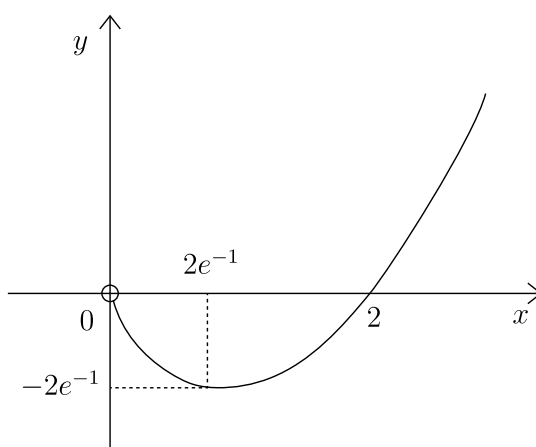
[I] (1) $f'(x) = x' \log \frac{x}{2} + x \left(\log \frac{x}{2} \right)' = \log \frac{x}{2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x}{2}} = \log \frac{x}{2} + 1.$

よって, $f'(x) = 0$ となるのは, $x = 2e^{-1}$ のときで, $f(x)$ の増減表は以下の通り。

x	0	...	$2e^{-1}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって, $f(x)$ は $x = 2e^{-1}$ で最小値 $-2e^{-1}$ をとる。

(2) $f''(x) = \frac{1}{x}$ であり, $x > 0$ で $f''(x) > 0$. よって, グラフは常に下に凸。(1) で書いた増減表と合わせて, グラフは下図の通り。



(3)

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^2 \left(-x \log \frac{x}{2} \right) dx = \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{2} \right)' \log \frac{x}{2} dx \\
 &= \left[-\frac{x^2}{2} \log \frac{x}{2} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{x^2}{2} \left(\log \frac{x}{2} \right)' dx \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \int_1^2 \frac{x}{2} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \log 2 + \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 \\
 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \log 2
 \end{aligned}$$

(4) 題意の図形の面積は $\int_2^a x \log \frac{x}{2} dx$ であるが, これを (3) と同様に計算して,

$$\int_1^a x \log \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{2} \log \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_2^a = \frac{a^2}{2} \log \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} + 1.$$

よって, $\int_2^a x \log \frac{x}{2} dx = 1$ は, $\frac{a^2}{2} \log \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} + 1 = 1$ と変形できる。 $a \neq 0$ に注意してこれを解くと, $\frac{1}{2} \log \frac{a}{2} = \frac{1}{4}$ であり, $\frac{a}{2} = e^{\frac{1}{2}}$. よって, $a = 2\sqrt{e}$.

[II] ① $-\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{7}{6}\vec{b}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$ ④ 2 ⑤ $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ ⑥ $\frac{5}{6}\vec{a} + \vec{b}$

[III] (1) $y' = \frac{1}{x}$ より, ℓ の方程式は, $y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{x}{e}$. つまり, $y = \frac{x}{e}$.

(2) $S_1(t) = \int_1^t \left(\frac{x}{e} - \log x \right) dx = \left[\frac{x^2}{2e} - x \log x + x \right]_1^t = \frac{t^2 - 1}{2e} - t \log t + t - 1$.

よって, $\frac{S_1(t)}{t^2} = \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{2e} - \frac{\log t}{t} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}$ であるが, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ を用いて,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_1(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{2e} = \frac{1}{2e}$$

(3) 直線 AP の方程式は $y = \frac{\log t}{t-1}(x-1)$ で,

$$\begin{aligned} S &= \int_1^t \left\{ \log x - \frac{\log t}{t-1}(x-1) \right\} dx = \left[x \log x - x - \frac{\log t}{2(t-1)}(x-1)^2 \right]_1^t \\ &= t \log t - t + 1 - \frac{(\log t)(t-1)}{2} \\ &= \frac{t+1}{2} \log t - t + 1. \end{aligned}$$

(4) $\triangle OPH$ は底辺の長さ t , 高さ $\log t$ なので, $S_3(t) = \frac{t}{2} \log t$.

$$\frac{S_2(t)}{S_3(t)} = \frac{\frac{t+1}{2} \log t - t + 1}{\frac{t}{2} \log t} = \frac{t+1}{t} - \frac{2}{\log t} + \frac{2}{t \log 2}$$

よって, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2(t)}{S_3(t)} = 1$.

[IV] ① $\frac{8}{21}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $-1 < a < 3$ ④ 5 ⑤ $\frac{2}{3}\pi$ ⑥ $\frac{5}{6}\pi$ ⑦ $\left(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
⑧ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

[I]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{17}$ ③ $b_n + 5$ ④ $\frac{1}{5n+2}$ ⑤ $35n + 49$ ⑥ $1, 7, 49$

[II]

① 36 ② 1 ③ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ⑥ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
⑦ $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

[III]

(1) ℓ の方程式は $y = (2p+1)x - p^2 + 1$, m の方程式は $y = -(2q+1)x + q^2 - 1$.

(2) (1) で求めた ℓ と m が同じである $\Leftrightarrow \begin{cases} 2p+1 = -2q-1 \\ -p^2+1 = q^2-1. \end{cases}$

これを解き、傾きが正であるものを求めると、 $p = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $q = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

よって、求める接線は $y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) 求める面積を S とおく、 $p = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ として、

$$S = \int_0^p \left\{ (x^2 + x + 1) - \left(\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}x^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)x \right]_0^p$$

$$= \frac{p^3}{3} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}p^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)p.$$

よって、 $S = \frac{1}{3} \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right)^3 + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{-5+3\sqrt{3}}{12}}}.$

[I] (1) $2x^4 - 9x^2 + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 2, x^2 + 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1$ であるから、範囲は $-2 \leq x \leq -1$ である。

(2) $f(x) = x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}$ である。 $f(x) = 0$ が実数解をもつための条件は $f(x)$ の最小値が 0 以下なので、 $b \leq \frac{a^2}{4}$ となる。 このとき、すべての解が $-2 \leq x \leq 1$ にある条件は、軸 $x = -\frac{a}{2}$ について $-2 \leq -\frac{a}{2} \leq 1$ であり、 $f(-2) \geq 0$ かつ $f(-1) \geq 0$ が成り立つことである。 すなわち、条件は「 $2 \leq a \leq 4$ かつ $b \leq \frac{a^2}{4}$ かつ $b \geq 2a - 4$ かつ $b \geq a - 1$ 」である。

(3) 直線 $y = x - 1, y = 2x - 4$ の交点は $(3, 2)$ である。 また、点 $(2, 1), (4, 4)$ における $y = \frac{x^2}{4}$ の接線は、それぞれ $y = x - 1, y = 2x - 4$ である。 よって、 D の面積は

$$\int_2^3 \left\{ \frac{x^2}{4} - (x - 1) \right\} dx + \int_3^4 \left\{ \frac{x^2}{4} - (2x - 4) \right\} dx = \frac{1}{6}$$

である。

[II] (1) ${}_2C_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

(2) ${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$

(3) 3つのサイコロからサイコロ A を選ぶ確率は $\frac{2}{3}$ で、サイコロ B を選ぶ確率は $\frac{1}{3}$ である。 サイコロ B を選び、かつ 1 の目が 2 回出る確率は (2) を用いれば $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{64} = \frac{3}{64}$ となる。 同様に、サイコロ A を選び、かつ 1 の目が 2 回出る確率は

$$\frac{2}{3} {}_3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{108}$$

である。 よって、1 の目が 2 回出る確率は両者の和で $\frac{5}{108} + \frac{3}{64} = \frac{161}{1728}$ であるから、サイコロが B である条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{64}}{\frac{161}{1728}} = \frac{81}{161}$$

となる。

[III] ① $\pi (180^\circ)$, ② 0 , ③ -2 , ④ $\frac{\pi}{4} (45^\circ)$, ⑤ $\frac{3}{4}\pi (135^\circ)$

[IV] ① $\left(\frac{k}{\sqrt{3}}, \frac{k}{\sqrt{3}}, \frac{k}{\sqrt{3}}\right)$, ② $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}, 0\right)$, ③ $(8, 10, 12)$, ④ $(10, 12, 8)$,
⑤ $6\sqrt{3}$

[I]

- ① $6 - 2X$ ② -1 ③ 2 ④ $3X - X^2$ ⑤ -1 ⑥ -4 ⑦ $\left(\frac{1}{2}, 256\right)$

[II]

- ① 3 ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{100}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{20}$ ⑥ $\frac{2}{25}$ ⑦ $\frac{3}{2}$

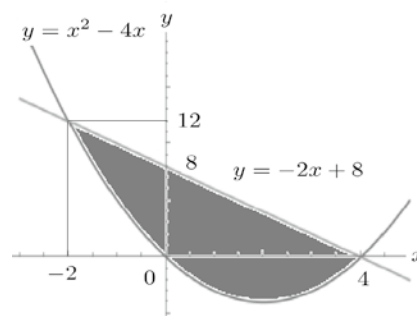
[III]

(1) 右図の灰色の部分である．ただし，境界は含む．

(2) 接線の方程式は $y = 2(p - 2)x - p^2$ より，

$$p = \frac{5}{2}, \quad k = -\frac{25}{4}.$$

(3) 点 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ のとき 最小値 $-\frac{25}{4}$ をとり，点 $(-2, 12)$ のとき 最大値 14 をとる．



〔Ⅰ〕

- (1) $f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ より $x \geq 0$ で $f'(x) = 0$ を解くと $x = 1$ を得る。増減表 (増減表は省略) を書くと $f(x)$ は $x = 1$ で極大値をとり、これが最大値でもあることがわかる。よって、最大値は $f(1) = 1/e$ となる。
- (2) 部分積分を用いると、 C を積分定数として、

$$\int te^{-t} dt = -(t+1)e^{-t} + C \quad (1)$$

および

$$\int t^2 e^{-t} dt = -(t^2 + 2t + 2)e^{-t} + C \quad (2)$$

が答え。

- (3) $f(x)$ のグラフを書くことにより (グラフは省略)、求める面積は $S = \int_0^4 \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$ となる。 $t = \sqrt{x}$ と置き、置換積分をすると $t^2 = x$ から $2t dt = dx$ であり、 x が 0 から 4 まで動くとき、 t は 0 から 2 まで動くので、

$$S = 2 \int_0^2 t^2 e^{-t} dt = 4 - \frac{20}{e^2} \quad (3)$$

と求まる。

〔Ⅱ〕

$$\textcircled{1} 4x^3 - 3x \quad \textcircled{2} \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \textcircled{3} 8x^4 - 8x^2 + 1 \quad \textcircled{4} 8 \quad \textcircled{5} -4 \quad \textcircled{6} -4 \quad \textcircled{7} \frac{3\pi}{7} \quad \textcircled{8} \frac{5\pi}{7}$$

共通テスト利用入試（併用）

〔III〕

$$(1) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = b$$

$$(2) \overrightarrow{OP} = \frac{m}{m+1} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{m+1} \overrightarrow{OB}$$

$$(3) \overrightarrow{OP} = \left(\frac{a}{m+1}, \frac{m+b}{m+1} \right) \text{である。よって、} P \text{が円 } C_1 \text{上にある。}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{m+1} \right)^2 + \left(\frac{m+b}{m+1} \right)^2 = 1 \quad (4)$$

$\Leftrightarrow a^2 + (m+b)^2 = (m+1)^2$ となる。よって、円 C_2 の中心 Q の座標は $(0, -m)$ 、半径は $m+1$ となる。

$$(4) \overrightarrow{QB} = (a, m+b) \text{ および } \overrightarrow{QP} = \left(\frac{a}{m+1}, \frac{m+b}{m+1} + m \right) \text{ となる。これより、} \angle PQB = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QP} = 0 \Leftrightarrow a^2 + (m+b)^2 + m(m+1)(m+b) = 0 \text{ となる。これと (3) の式から、} a \text{ を消去すると } b = -\frac{m^2 + m + 1}{m} \text{ を得る。これを再び (3) に代入し、} a \text{ に関して解くと } a = \pm \frac{m+1}{m} \sqrt{m^2 - 1} \text{ を得る。よって、} B \text{ の座標は}$$

$$\left(\pm \frac{m+1}{m} \sqrt{m^2 - 1}, -\frac{m^2 + m + 1}{m} \right) \quad (5)$$

と求まる。

〔IV〕

$$\textcircled{1} \frac{2(N+1)}{N+2} \quad \textcircled{2} \log 2 \quad \textcircled{3} -i \quad \textcircled{4} 6 \quad \textcircled{5} \frac{24}{91} \quad \textcircled{6} 2e_n + 1 \text{ (} e_n + 2^n \text{ も可)} \quad \textcircled{7} 2^n - 1$$