

別紙解答用紙に解答すること。

[1] 次の をうめよ。(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり, $\frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = 4$ を満たすものとする. このとき,

$$\sin \theta + \cos \theta = \text{①}, \quad \sin \theta \cos \theta = \text{②}, \quad \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \text{③}$$

である.

(2) 整式 $x^{2026} + 2x^{1013} - 3x^{506}$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りは ④ である.(3) 3 枚のコインを同時に投げるとき, 表がちょうど 2 枚出る確率を求めると, ⑤ である.(4) $\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}, \sqrt[5]{10}$ の大小を不等式を用いて表すと, ⑥ となる. また, $x > 0$ のとき, 方程式 $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ の解は $x = \text{⑦}$ である.(5) 方程式 $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 1 + \log_2(x+5)$ の解は $x = \text{⑧}$ である.(6) $\triangle ABC$ の内部の点 P が, 正の数 x に対して, $x\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{0}$ を満たしているとする. $\triangle ABP$ と $\triangle ABC$ の面積比が $3:7$ であるとき, x の値は ⑨ である.(7) $|z - 3 + 2i| = 4$ を満たす複素数 z に対して, $|z + 4 - i|$ の最小値は ⑩ である.(8) 関数 $f(x) = x \log x$ ($x > 0$) の導関数は ⑪ であり, $x = \text{⑫}$ で極小値 ⑬ をとる.(9) すべての実数 x に対して, 不等式 $k \cdot 4^x - 2^{x+1} + k + 3 > 0$ が成り立つような実数の定数 k のとり得る値の範囲は, ⑭ である.(10) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos 2x - e^{-x^2})dx$ の値は ⑮ である.(11) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は ⑯ である.

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

[2] 自然数 x, y, z は $x^2 + y^2 = z^2$ を満たすとする. このとき, x, y, z の少なくとも 1 つは 5 の倍数となることを証明せよ.

以上