

数理がとらえるゆらぐ社会のかたち

中野 張

2025 年 10 月 22 日

東京科学大学 情報理工学院 数理・計算科学系

目次

確率と不確実性

不確実性を活かす

不確実性を価格に換える

人工知能はサイコロを振る

確率と不確実性

同じ誕生日の人がいる確率

問題

ある年（うるう年ではない）に生まれた k 人のうち、最低 2 人以上が同じ誕生日である確率を求めよ

仮定：

- ▶ k 人の誕生日は無関係である（特に、双子はいない）
- ▶ 各日が同等に誕生日になり得る（日による出生率の違いは無視する）
- ▶ $k \leq 365$ （そうでないと、必ず 2 人以上の誕生日が同じになる）

同じ誕生日の人がいる確率

k 人それぞれ 365 通りあるので、起こり得る結果は 365^k 通り． k 人すべての誕生日が異なるのは、

$$365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - k + 1)$$

通り．これより、 k 人すべての誕生日が異なる確率は

$$\frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots (365 - k + 1)}{365^k}$$

よって求める確率 p は

$$p = 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots (365 - k + 1)}{365^k}$$

同じ誕生日の人がいる確率

最低 2 人以上が同じ誕生日である確率

k	p	k	p
5	0.027	25	0.569
10	0.117	30	0.706
15	0.253	40	0.891
20	0.411	50	0.970
22	0.476	60	0.994
23	0.507		

犯人が見つかる確率

People v. Collins 事件：1968 年のアメリカ合衆国カリフォルニア州控訴裁判所の判例

- ▶ ロサンゼルスで財布が盗まれた事件が発生した
- ▶ 「ブロンドヘアをポニーテールに束ねた若い女性とあごひげを生やした黒人運転手が黄色い車に乗って逃走した」という証言があった
- ▶ 特徴に合致するカップルが事件の数日後に逮捕された
- ▶ 証言以外に物証はなく，無作為抽出したカップルがこの特徴に合致する可能性は $8.3 \times 10^{-8} \approx 1200$ 万分の 1

この確率の小ささと他に物証がないことから，陪審員は有罪の評決を下した

犯人が見つかる確率

しかし、裁判所は、この確率計算には根拠がないとし有罪判決を棄却。以下がより適切な確率計算

- ▶ 特徴に合致するカップルが1組存在するという条件の下で、2組目が存在する確率を考える
- ▶ カップル自体は n 組存在し、先の特徴に合致するカップルが抽出される確率を p とする

$$\begin{aligned} & \Pr(\text{最低 2 組のカップルが特徴に合致} \mid \text{最低 1 組のカップルが特徴に合致}) \\ &= \frac{1 - (1 - p)^n - np(1 - p)^{n-1}}{1 - (1 - p)^n} \approx 0.2966 \end{aligned}$$

0.2966 という確率は被告人を有罪とすることに疑念を持つには十分な大きさ

そもそも確率とは何だろう

（物的に）客観的

- ▶ 頻度説
- ▶ 例えば、特定の放射性原子が一定時間の間に崩壊する確率は物的に客観的
- ▶ 40 人が集まる会を（人を入れ替えて）1000 回繰返す
→ 891 回は誕生日が同じペアが見つかる

そもそも確率とは何だろう

認識論的

- ▶ 主観説
- ▶ 人間の知識の限界
- ▶ 目撃情報により知識が増える → その人が犯人である確率が変わる

そもそも確率とは何だろう

認識論的な例

- ▶ 会社 A は株式市場に関する予測情報を提供している
- ▶ 会社 A からは、月曜日の朝に、翌週月曜日に特定株が値上がりするか値下がりするかの予測情報がダイレクトメッセージ (DM) で送られてくる
- ▶ B さんは、会社 A から 7 週連続で DM を受け取り、予測は 7 週連続で的中していた

B さんからすると、これが起きる確率は $(1/2)^7 = 0.008$ である

そもそも確率とは何だろう

認識論的な例

実際には、会社 A は $2^7 = 128$ 人の見込み客を相手にしていた。手続きは以下の通り

- ▶ 最初の週に、値上がりするという DM を 64 人に送り、残り半分には値下がりする旨の DM を送る
- ▶ 第 2 週には当たった方の 64 人を半分に分け、同じように DM を送る
- ▶ これを繰り返すと、第 7 週の終わりに会社 A の見込み客のうち、必ず 1 人（そしてただ 1 人だけ）続けて予測が当たったということになる

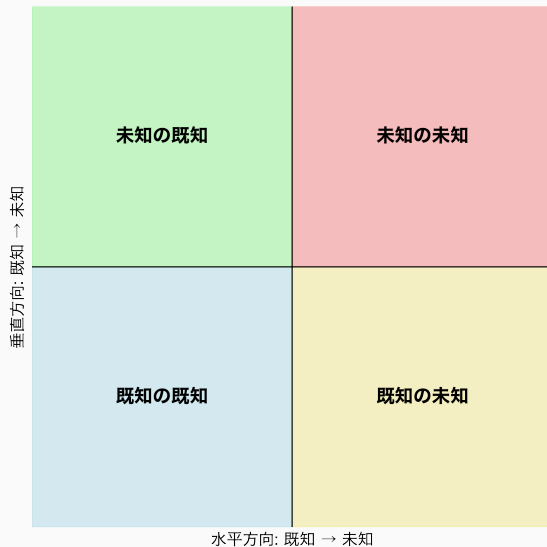
すなわち、会社 A はそもそも予測をしていない（確率現象ではない）

そもそも確率とは何だろう

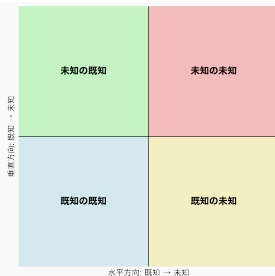
認識論的な例

- ▶ この手法により、7週の間には「7週連続で予測が当たった唯一の人物」が必ず1人存在する
- ▶ つまりこの現象は確率的に偶然生じたものではなく、Bさんの知識が限られていることに起因する主観的誤認識によって「ありそうもない出来事」に見えているにすぎない
- ▶ 同じ「確率」という語で表現される現象にも、物理的必然性と情報的限定性という異なる側面がある

不確実性の四象限



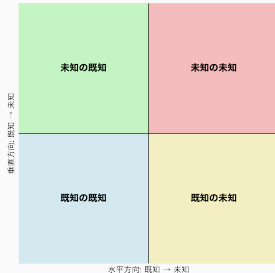
不確実性の四象限



既知の既知 (Known Knowns)

- ▶ どんな事象が起こり得るか分かっており、確率も分かっている
- ▶ サイコロの出目、生命保険の保険請求、製造業における歩留まり率
- ▶ 数理モデルで予測できる

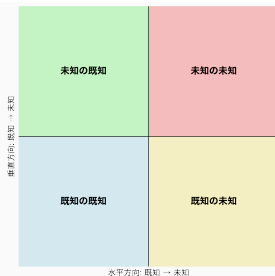
不確実性の四象限



未知の既知 (Unknown Knowns)

- ▶ 個人や組織が実は知っているのに、認識していない、活用していない知識
- ▶ 過去の失敗事例が組織内で共有されていない。専門家が警鐘を鳴らしているのに無視される
- ▶ 情報共有により対応

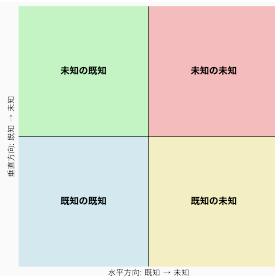
不確実性の四象限



既知の未知 (Known Unknowns)

- ▶ 起こり得る事象は分かっているが、その確率や正確な影響は分からない
- ▶ 大地震発生のタイミング、新製品の市場シェア、為替相場
- ▶ モデル化、予測は難しい

不確実性の四象限



未知の未知 (Unknown Unknowns)

- ▶ どんな事象が生じ得るかも知らない．存在自体が想定外
- ▶ 9.11 同時多発テロ，リーマンショック（2008 年金融危機），COVID-19 の流行，人口知能の急速な発展
- ▶ システムの柔軟性・冗長性を確保（後述）

予測の難しさ

- ▶ ある予測システム「1週間後に昨日の終値から10%上がります」
 - この情報を信じる人は事前に買い、1週間後、10%上がった直後に売ろうとする
 - 信じる人が多ければ多いほど1週間経つ前に株価が上がる
 - 事前に上がった株価を見て、早めに売り抜けようとする人も
 - 1週間後にどうなっている？
- ▶ 予測情報が信用されればされるほど、予測通りに行かなくなる

ブラックスワン

「ブラックスワン (Black Swan)」

- ▶ 黒い白鳥（ブラックスワン）の発見 → 常識や経験からは考えられないが、実際には起こりうる出来事のこと

定義

- ▶ 予測不可能：事前にはほとんどの人が想定していない
- ▶ 巨大なインパクト：起これば社会・経済・科学に非常に大きな影響
- ▶ 事後合理化：起きた後は「必然だった」と説明されがちだが、実際には予測できない



ナシーム・ニコラス・タレブ, 『ブラック・スワン - 不確実性とリスクの本質』 (2009)

不確実性を活かす

反脆弱性（アンチフラジャイル）

脆弱（fragile）

- ▶ ちょっとしたショックで壊れる
- ▶ ガラスのコップ，過剰にレバレッジをかけた金融機関

頑健（robust）

- ▶ ショックを受けても壊れないが，強くなるわけでもない
- ▶ 岩や軍用機

反脆弱（antifragile）

- ▶ ショックやストレス，変動を受けると，むしろ強くなる
- ▶ 人体の筋肉や免疫系



ナシーム・ニコラス・タレブ，『反脆弱性－不確実な世界を生き延びる唯一の考え方』（2017）

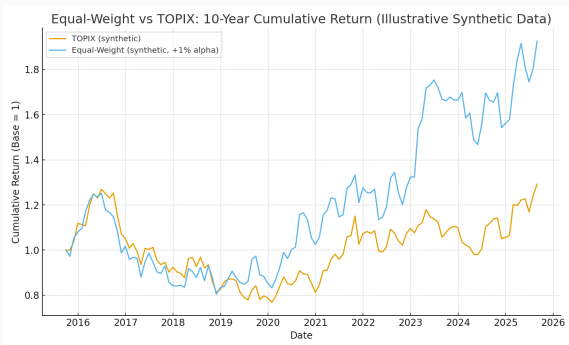
反脆弱性（アンチフラジャイル）

アンチフラジャイルなシステム

- ▶ 予測不能な出来事を「避ける」のではなく、「利用する」
- ▶ ブラックスワンのような極端事象を機会にシステムが進化・成長する
- ▶ 未来は予測できない。起きることを当てるのではなく、「起きたときに成長できる仕組み」を作る
- ▶ 冗長性，分散性

冗長性，分散性

- ▶ 遺伝子重複
- ▶ 現金持ちの投資戦略（ウォーレン・バフェット）
- ▶ 等ウェイトポートフォリオ



最良を見つける

限られた資源の中で、できるだけ良い選択を数学で見つきたい

- ▶ 物流と交通：「最適ルート」
- ▶ エネルギー：「電気を安定・安く届ける」
- ▶ 医療：「治療計画を最適化」
- ▶ AI・機械学習：「最適化＝学習」

問題

「目的関数」 $f(x)$ の最小化

- ▶ 例えば、 $f(1) = 0.1$, $f(151) = -30$, $f(-\sqrt{7}) = 99\sqrt{2}, \dots$

最良を見つける

古典的手法（勾配降下法，ニュートン法など）

- ▶ いま立っている場所の「傾き（勾配）」を測る
- ▶ 傾きが小さくなる方向（下り坂）へ少し進む
- ▶ これを繰り返して，一番低いところ（谷底）を探す

「自分の足元の傾きだけを見て，近くの谷底にまっすぐ降りる」

→ 近くの小さな谷（＝局所解）に到達してしまう

その先にもっと深い谷（＝真の最適解）があっても
気づかない

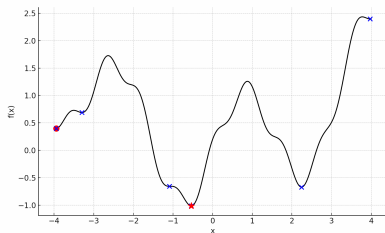
最良を見つける

確率的手法（ベイスンホッピングアルゴリズムなど）

- ▶ 現在の位置から「局所最適化アルゴリズム」（例：勾配降下法、ニュートン法など）で一番近くの谷底（局所解）まで降りる
- ▶ ランダムに「ジャンプ」して別の谷を探索する
- ▶ ジャンプ先から再び局所探索をして、新しい谷底を見つける
- ▶ 新しい谷の方が低ければ（＝良い解）、そこに移動する
- ▶ 高い場合も、一定の確率で移動を許す．これを繰り返す
- ▶ 一度局所解に陥っても、抜け出すチャンスがある
- ▶ 全体をより広く探索できる

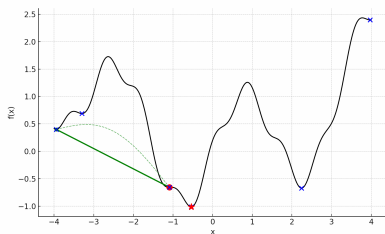
最良を見つける

ベイスンホッピング (Basin Hopping) アルゴリズム



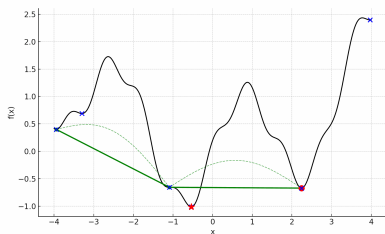
最良を見つける

ベイスンホッピング (Basin Hopping) アルゴリズム



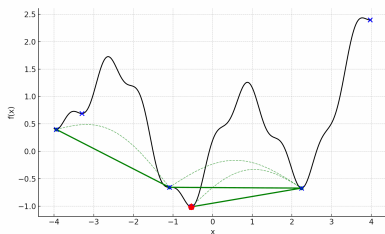
最良を見つける

ベイスンホッピング (Basin Hopping) アルゴリズム



最良を見つける

ベイスンホッピング (Basin Hopping) アルゴリズム



不確実性を価格に換える

価格は公正性により決まる

割引債



- ▶ 1 年後に 100 円受け取る
- ▶ 銀行預金金利は 1% (100 円が 1 年後に 101 円)
- ▶ $P = ?$

価格は公正性により決まる

答. $P = \frac{100}{101}$

もし $P > \frac{100}{101}$ なら

- ▶ 自分が割引債を発行（売る）. P 円を受け取り，全額を預金
 - ▶ 1年後， $P \times 1.01$ 円を引き出す．契約通り 100 円支払う
- 残りは $P \times 1.01 - 100 = 1.01 \times (P - 100/101) > 0$
- ▶ 元手ゼロで確実に利益が出る（裁定取引）
 - ▶ 価格が高すぎる（売り手が常に得をする）

価格は公正性により決まる

もし $P < \frac{100}{101}$ なら

- ▶ P 円を銀行から借りて割引債を買う
 - ▶ 1年後, 100円を受け取る. $P \times 1.01$ 円を銀行に返す
- 残りは $100 - P \times 1.01 = 1.01 \times (100/101 - P) > 0$
- ▶ 元手ゼロで確実に利益が出る
 - ▶ 価格が安すぎる (買い手が常に得をする)

公正価格 = 誰もずるをできない価格

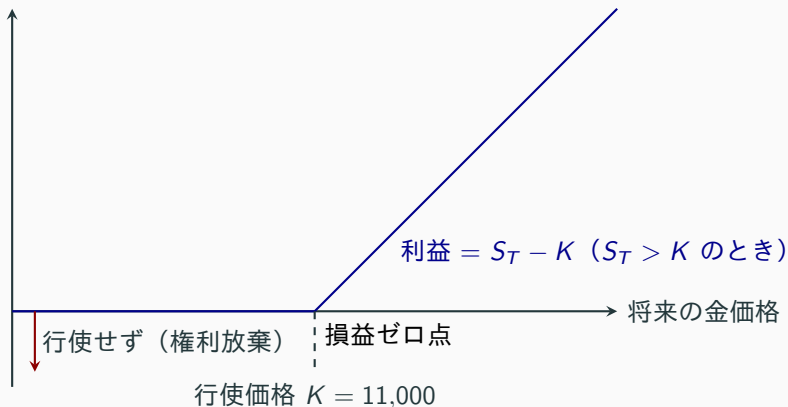
価格は公正な期待値

金オプション

- ▶ 現在 $1g = 10000$ 円. 3ヶ月後に $1g = 11000$ 円で買う「権利」
- ▶ このオプションを買った場合（宝飾メーカーなど），3ヶ月後に $1g = 12000$ 円なら，権利を行使し安く買うことができる
- ▶ 3ヶ月後に $1g = 9000$ 円なら，買い手は権利を行使しない
- ▶ 買い手には損をしないような選択権がある
→ この契約には権利料（価格）が発生する

価格は公正な期待値

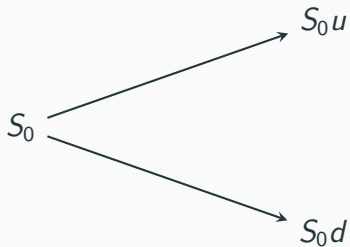
キャッシュフロー



問題

支払う権利料 (オプション価格) は？

価格は公正な期待値



- ▶ S_0 : 金の現在価格
- ▶ 預金金利 $r > 0$
- ▶ $0 < d < 1 + r < u$

オプションの公正価格 $C^* = ?$

価格は公正な期待値

公正な取引戦略

売り手は3ヶ月後、行使された場合の差額 $S_0u - K$ あるいは $S_0d - K$ を支払う「義務」がある

この正味の額 $(S_0u - K)_+$ または $(S_0d - K)_+$ を市場取引で賄いたい

- ▶ 価格 C^* を受け取り、金を x グラム買う (x がマイナスの場合は空売り). 残りを預金 (または借入)

3ヶ月後,

上昇シナリオ: $(C - xS_0) \times (1 + r) + xS_0u = (S_0u - K)_+$

下落シナリオ: $(C - xS_0) \times (1 + r) + xS_0d = (S_0d - K)_+$

価格は公正な期待値

上の式から下の式を引いて,

$$x = \frac{(S_0u - K)_+ - (S_0d - K)_+}{S_0(u - d)}$$

このようなオプションの支払い額の構成法を複製戦略という。このとき, この x の値を複製の式に代入し,

$$C^* = p \times \frac{1}{1+r}(S_0u - K)_+ + q \times \frac{1}{1+r}(S_0d - K)_+$$

となる

- ▶ $p = \frac{1+r-d}{u-d}$, $q = \frac{u-(1+r)}{u-d}$
- ▶ p は上昇シナリオの (仮想的な) 確率, q は下落シナリオの確率

価格は公正な期待値

$$C^* = p \times \frac{1}{1+r}(S_0u - K)_+ + q \times \frac{1}{1+r}(S_0d - K)_+$$

- ▶ オプション価格 C^* は、金利で割り引いた正味支払い額の「公正な」期待値
- ▶ 上昇，下落シナリオの「本当の」確率は関係ない

この価格がずれると裁定取引ができてしまう（公正でない）

- ▶ 取引価格 C が C^* よりも高い場合
 - ▶ 売り手になる．先述の複製戦略により， C^* だけ元手があればオプションの支払いを工面できる
 $(C - C^*) \times (1 + r)$ だけ確実に利益を得る

価格は公正な期待値

- ▶ 取引価格 C が C^* よりも安い場合
 - ▶ 買い手になる．銀行から C^* 借りて， C でオプションを買う． x グラム金を空売り， xS_0 を預金

3ヶ月後，

上昇: $(C^* - C)(1 + r) - (C^* - xS_0) \times (1 + r) - xS_0u + (S_0u - K)_+ = (C^* - C)(1 + r)$

下落: $(C^* - C)(1 + r) - (C^* - xS_0) \times (1 + r) - xS_0d + (S_0d - K)_+ = (C^* - C)(1 + r)$

まとめ

- ▶ 価格＝不確実性の対価
- ▶ 不確実性は「公正に」現在の価格に織り込まれる
- ▶ 「実際の」不確実性は必ずしも影響しない

人工知能はサイコロを振る

画像生成 AI

「大田区で有名な場所や物をイラスト風の絵にしてください」



画像生成 AI

- ▶ Stable Diffusion
- ▶ DALL-E 3
- ▶ Midjourney
- ▶ Flux.1

これらは全て拡散生成モデルの一種である **DDPM**
(Denoising Diffusion Probabilistic Model) に基づく



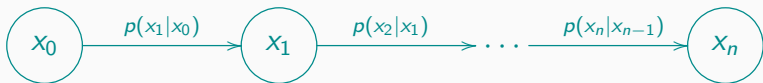
Ho, J. and Jain, A. and Abbeel, P., Denoising diffusion probabilistic models, Advances in Neural Information Processing Systems, **33** (2020), 6840–6851.

拡散モデル

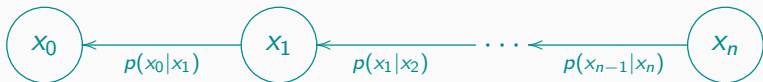
所与のデータ x_0 にノイズを加え正規分布に到達させる。その過程で生成方法を学習



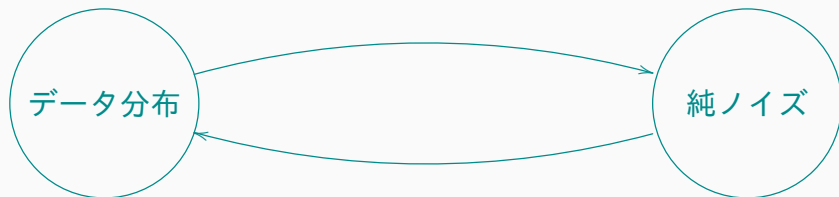
「順時間過程」(学習)



「逆時間過程」(生成)



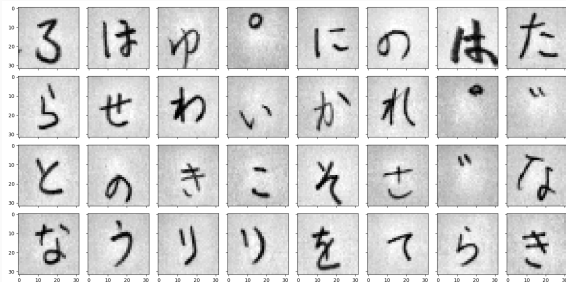
拡散モデル



- ▶ データにノイズを加えながらデータが従う確率法則を学習
- ▶ データが純ノイズになった未来から、「サイコロを振り」、ノイズを除去しながら現在に戻ってくる
- ▶ 戻ってきたときには、元データと本質的には同じだが、ランダムに異なるデータが作られる

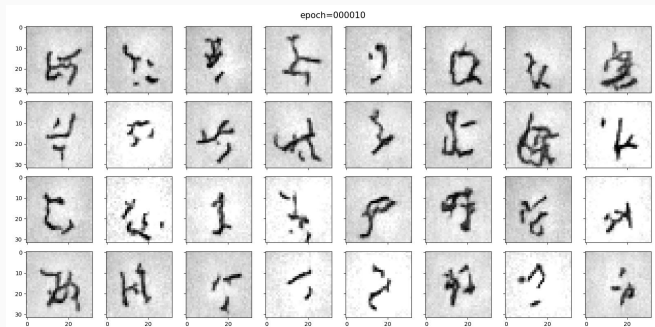
AI が「学ぶ」様子

- ▶ ETL 手書き文字データ（ひらがな，半濁点，濁点，サンプル数: 16800）
- ▶ オリジナルの DDPM，ニューラル・ネットワークは U-Net を使用

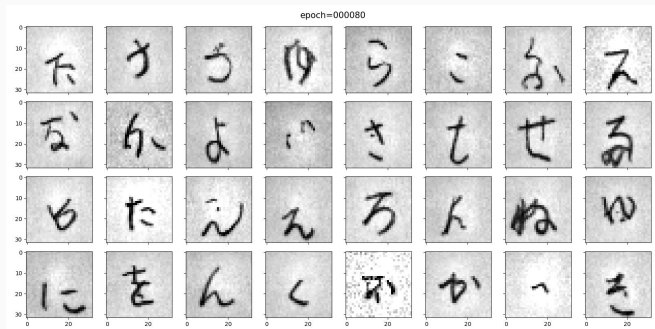


学習データ

AIが「学ぶ」様子

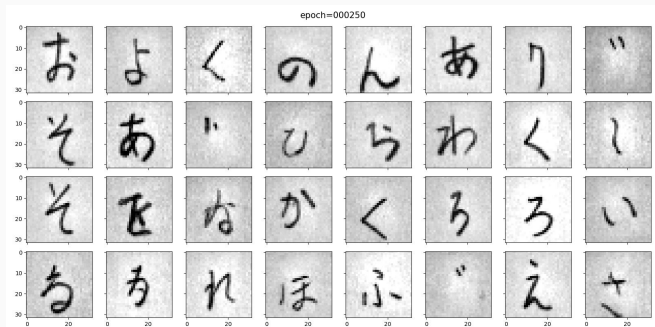


AIが「学ぶ」様子



epoch: 80

AIが「学ぶ」様子



epoch: 250

AIが「学ぶ」様子



epoch: 550

拡散モデルの展開

- ▶ 音声波形生成
- ▶ 音楽生成
- ▶ 3D オブジェクト生成
- ▶ 動画生成
- ▶ 医用画像生成
- ▶ タンパク質構造予測 (Google AlphaFold 3)

拡散モデルの数理的構造

シュレディンガーの問題 (1932, 1933)

- ▶ $\{X_t^{(1)}\}_{0 \leq t \leq 1}, \dots, \{X_t^{(N)}\}_{0 \leq t \leq 1}$: ブラウン運動する N 個の独立な粒子
- ▶ 時点 0 でのデータ $X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(N)}$ が成す分布は $\rho_0(x_0)$
- ▶ 時点 1 でのデータ $X_1^{(1)}, \dots, X_1^{(N)}$ が成す分布は $\rho_1(x_1)$

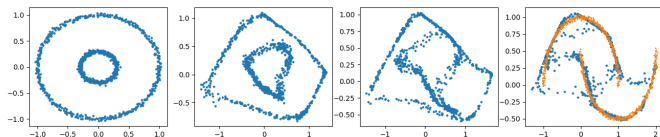
このとき、これが起こる確率を最大にする X の分布は何か？

 Schrödinger, E., *Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss. Berlin. Phys. Math.*, **144** (1931), 144–153.

 Schrödinger, E., *Ann. Inst. H. Poincaré*, **2** (1932), 269–310.

拡散モデルの数理的構造

シュレディンガー橋 $\longleftrightarrow$ 確率分布の輸送 $\longleftrightarrow$ 拡散モデル



- ▶ 粒子をランダムに動かして，確率的な2つの状態をなめらかにつなぐ
- ▶ シュレディンガー橋は「自然」（エントロピー最小）な輸送 $\rightarrow$ 生成結果の多様性はここから？
- ▶ 不確実性の中に自然さがある