

北海道大学 2023 理系第1問

複素数平面上における図形 $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ は次の条件 (A) と (B) をみたすとする。
ただし、 i は虚数単位とする。

- (A) C_1 は原点 O を中心とする半径 2 の円である。
- (B) 自然数 n に対して、 z が C_n 上を動くとき $2w = z + 1 + i$ で定まる w の描く図形が C_{n+1} である。

- (1) すべての自然数 n に対して、 C_n は円であることを示し、その中心を表す複素数 α_n と半径 r_n を求めよ。
- (2) C_n 上の点と O との距離の最小値を d_n とする。このとき、 d_n を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ を求めよ。

☆複素数平面

→ 式でいくのか、複素数平面上で
図形的で考えるのか。

→ 実数で？ そのまま変形？

→ $a+bi$? $r(\cos\theta + i\sin\theta)$?

常にいろんな方向の意識を持っておく！
数学Ⅳ特講の複素数平面も参考に。

初見での思考は前回動画で！まず実験

(i) <頭の中> 図形的にはよくわからん。

(B) : $n \rightarrow n+1$ の関係が定められて

いるので、全称命題は帰納法、

一般項は漸化式を立てて解くのか
良さそう。 → まとめてやる。

(i) $n=1$ のとき、(A)より C_1 は円であり、
 $\alpha_1 = 0$, $r_1 = 2$ である。

では次... $n=k \rightarrow n=k+1$ で考える。

仮定を設定するために、

円の方程式をおかないといけない

→ $\left(\begin{array}{l} \text{実数で? } (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r_k^2 \\ \text{複素数で? } |z-\alpha_k| = r_k \end{array} \right.$

→ $2w = z+1+i$ で w の軌跡を
求める上でどちらがやりやすいか
明らかに $|z-\alpha_k| = r_k$!

(ii) $n=k$ のとき、 C_k は円であると仮定
する C_k は $|z-\alpha_k| = r_k$ と表される。
このとき、

(B)より、 z が $|z - \alpha_k| = r_k \dots \textcircled{1}$ を満たすときに、 $2w = z + 1 + i$ により定まる w の式が C_{k+1} の式となる。

→ 軌跡の問題、逆像法

$$\begin{cases} |z - \alpha_k| = r_k \\ 2w = z + 1 + i \end{cases} \text{ を満たす } z \text{ が存在する}$$

ような w の条件を求める。

→ 単に代入すればOK

$z = 2w - 1 - i$ を $\textcircled{1}$ に代入して、

$$\begin{aligned} |2w - 1 - i - \alpha_k| &= r_k \\ \left| w - \frac{\alpha_k + 1 + i}{2} \right| &= \frac{r_k}{2} \end{aligned}$$

よって C_{k+1} は 中心 $\frac{\alpha_k + 1 + i}{2}$ 、半径 $\frac{r_k}{2}$ の円となる。

以上 (i)(ii) より、全ての n に対して C_n は円であることが示されて、中心 α_n と半径 r_n は以下の漸化式で定まる。

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2} + \frac{1+i}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases} \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} r_1 = 2 \\ r_{n+1} = \frac{r_n}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases} \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ を解くと、 } \alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{1+i}{2} \rightarrow \alpha = 1+i$$

$$\alpha_{n+1} - (1+i) = \frac{1}{2} (\alpha_n - (1+i)) \text{ より}$$

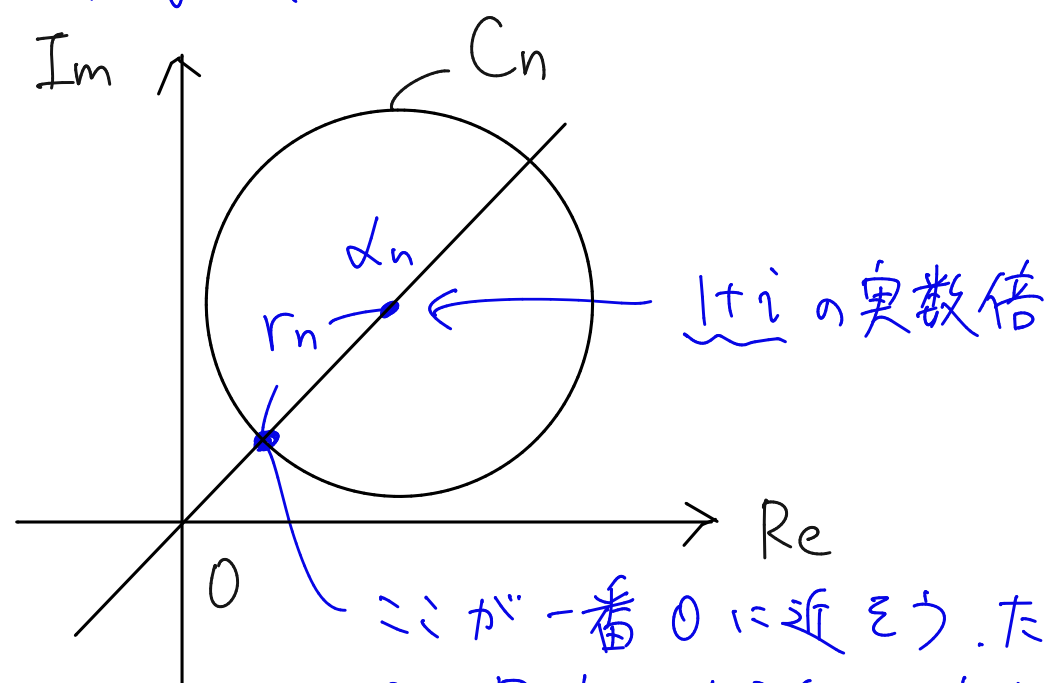
$$\alpha_n - (1+i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (0 - (1+i))$$

$$\alpha_n = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)(1+i)$$

$$\textcircled{3} \text{ を解くと、 } r_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

★妥当性チェック

(2) まず図形的に手がかりがないか考える
 → ムリならゴリゴリ式で最小値考え
 しかない。



ここが一番 0 に近そう。ただ
 0 が円内にあるケースもある
 ので要注意!

→ 軽くでも示せるとベスト

(本番では言い切るのも一案)

複素数平面で 45° 線を l とすると、
 α_n の式より C_n の中心は l 上にあり、

$\operatorname{Re}(\alpha_n) = \operatorname{Im}(\alpha_n) \geq 0$ である。... (*)
 ここで、 C_n と l の交点のうち、実部が
 小さい方を A_n とおき、 A_n で 0 との
距離が最小となることを示す。

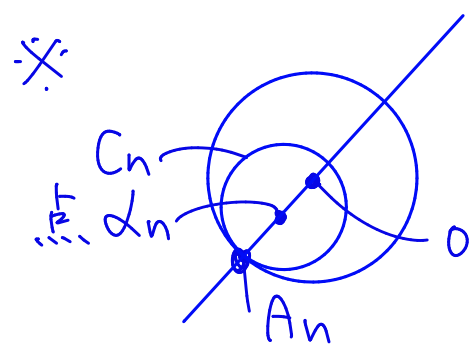
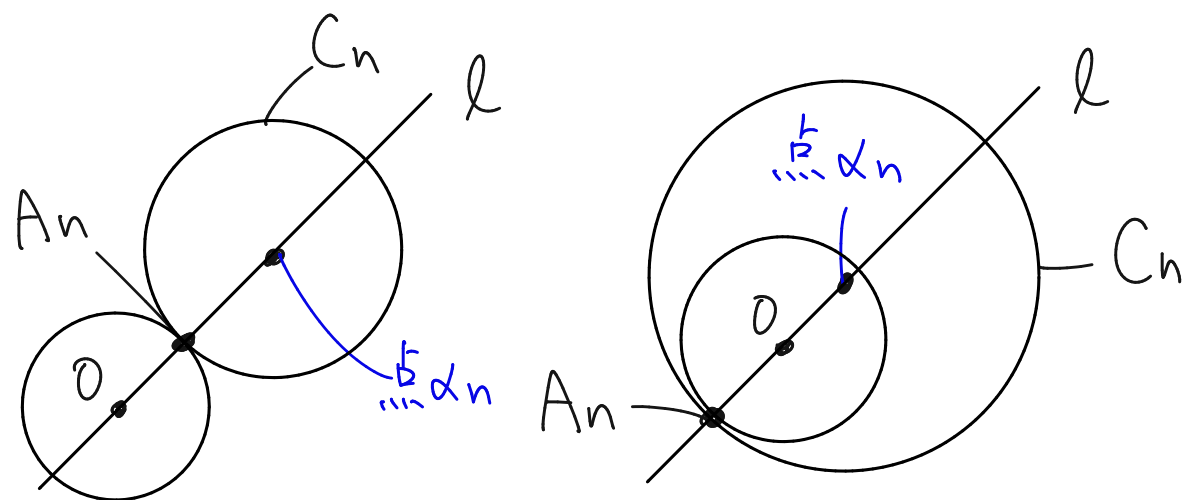
※めっちゃ細かい話で、 $n=1$ のときは



0 が中心なので、 C_n 上のどの点
 でも最小となる (どこでもキョリ=2)
 ので、最小となるのは A_n のみ。
 と言わないように注意!

※今回は円の位置関係を使ってサクッと
 示すので、幾何的にちゃんと示したい人は
 前回動画を参照!

0 を中心として A_n を通る円を考えると、
 (*)より、 C_n との位置関係は以下の通り
 外接するか、 C_n に含まれて内接するので、

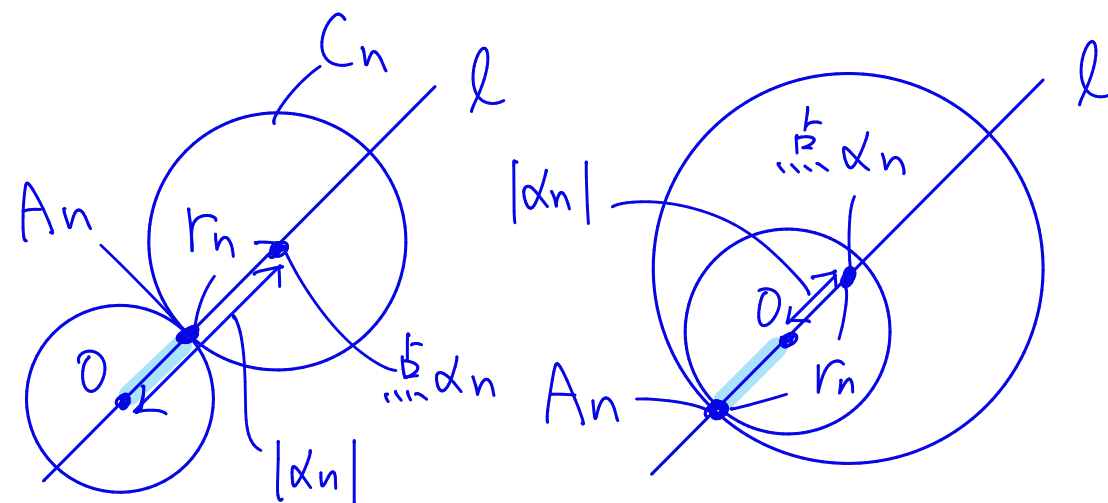


とかがない、と言うために
 $\operatorname{Re}(\alpha_n) = \operatorname{Im}(\alpha_n) \geq 0$ と言った!

C_n 上の点について、 A_n で O との距離が最小となる ことがわかる。

よって、 d_n は OA_n の長さに一致し、

$$\begin{aligned} d_n &= \left| |\alpha_n| - r_n \right| \\ &= \left| \sqrt{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right| \end{aligned}$$



となる。また、

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} d_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt{2} \left(1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}} \rightarrow 0 \right) - \underbrace{\left(\frac{1}{2} \right)^{n-2}} \rightarrow 0 \right| \\ &= \sqrt{2} \quad \text{と求められる。} \end{aligned}$$