

高校数学良問演習 57/100 軌跡と領域①

次のようなよくある軌跡の解答例について、次の問いに答えよ。

【問い】 原点 O と点 $A(3, 0)$ からの距離の比が $2:1$ となる点 P の軌跡を求めよ。

【解答】 P の座標を (x, y) とすると、

$$OP:PA = 2:1$$

$$OP = 2PA \quad \dots [1]$$

$$OP^2 = 4PA^2 \quad \dots [2]$$

$$x^2 + y^2 = 4((x-3)^2 + y^2)$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 4 \text{ となる。}$$

逆にこの円上にある点は条件を満たす。 $\dots [3]$

よって軌跡は、円 $(x-4)^2 + y^2 = 4$

(1) 文章 [3] はなぜ書かれているのだろうか？

(2) 式 [2] は、式 [1] が成り立つための何条件か？

(3) (2) の回答をもとに、文章 [3] を書くことが本当に必要か考えよ。

ポイント 「軌」をうまく書くのが難しい。

軌跡の式：点を例えば (X, Y) とおいたとき、

題意の条件 が成り立つための

必要十分条件 を、 (X, Y) で表した式。

とても大事!

例： $\left(\begin{array}{l} \cdot \text{距離の比が } 0:\Delta \\ \cdot \text{パラメータが存在} \end{array} \right.$ など。言い換えが必要なことも。

この問題で考えると、 $P(x, y)$ とおいたときに、求める軌跡の式は、

「 $OP:PA = 2:1$ となるための必要十分条件を、 (x, y) で表した式」

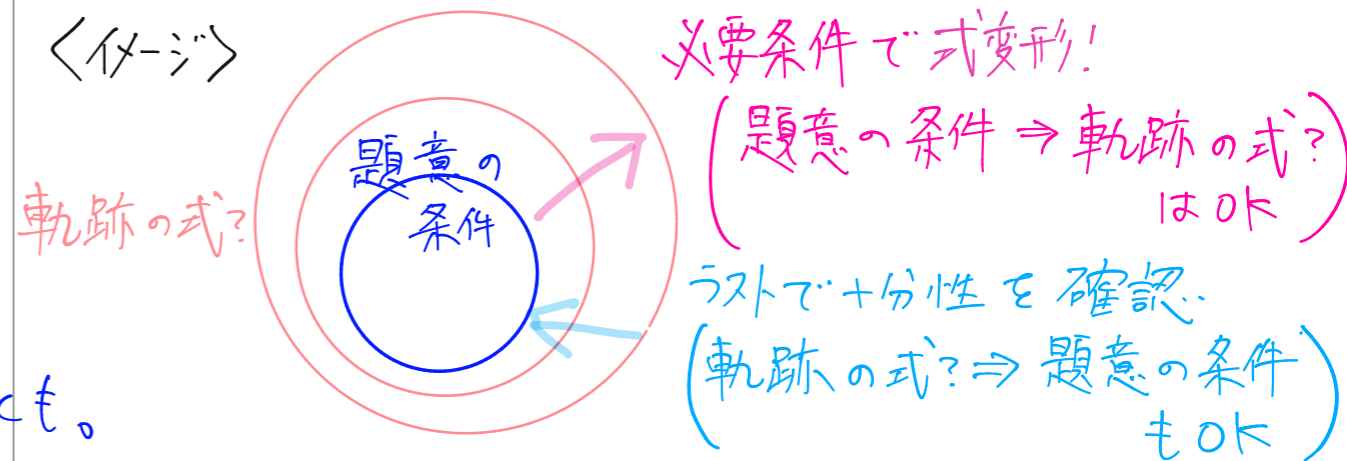
となる!

☆ ではどうやって必要十分条件を出していくか？

① 必要条件 (\Rightarrow) で式変形を行い、

最後に十分性 (\Leftarrow) を確認。 8/100参照

<イメージ>

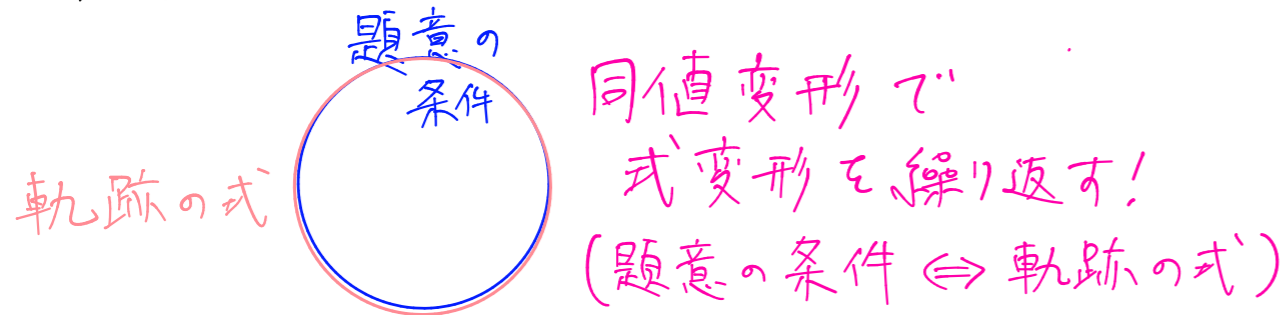


② 同値変形 で式を変形していく。

必要十分性をキープした式変形。

<イメージ>

9~10/100 参照



→ 最後の十分性の確認は不要!!

解説

(1) これは出てきた式の十分性を確認するために書いています。つまり、考え方①でいう、「軌跡の式? ⇒ 題意の条件」が正しいかを確認している。

(2) • この解答の流れは考え方①に基づいていて、必要条件として式変形していそう。つまり、「 $OP = 2PA \Rightarrow OP^2 = 4PA^2$ 」

実際にこの命題は正しい。

- 一方で、よくよく考えてみると、 $OP \geq 0$ 、 $PA \geq 0$ なので、逆も成り立ち、 $OP = 2PA \Leftrightarrow OP^2 = 4PA^2$

となるので、[2]は[1]が成り立つための必要十分条件になっていて、

実はこの式変形は同値変形となる。

(3) • 必要条件として考えるので「あれば」,
[3]は書かないとダメ。
(十分性を示すため)

• 一方で必要十分条件として考えると、
今回他の式変形も同値変形なので、
[3]は不要。このとき答案としては、
このように同値性を強調してあげると、
わかりやすい。

$$\begin{aligned} OP:PA &= 2:1 && \leftarrow \text{題意の条件} \\ \Leftrightarrow OP &= 2PA \\ \Leftrightarrow OP^2 &= 4PA^2 && (\because OA \geq 0, PA \geq 0) \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 &= 4 && \leftarrow \text{軌跡の式} \end{aligned}$$

よって、 $(x-4)^2 + y^2 = 4$

同値!!
(題意の条件 \Leftrightarrow 軌跡の式)

<補足>

「軌跡」というと図形的な要素が加わるので、
図形名をいっしょに答えるようにする。
(例: 直線~, 円~, など)

「軌跡の式」が問われている場合には、
方程式の形でOK!

必ず「この根本の部分を理解するように
して下さい! 軌跡の問題を続けていき
ますが、全てこの考え方に戻ってきますので。
今までしっくり来てなかった人も、一緒に
頑張りましょう!



— はってん (@b-battenn)