

名古屋大学 2022 理系第3問

複素数平面上に、原点 O を頂点の 1 つとする正六角形 $OABCDE$ が与えられている。
ただしその頂点は時計の針の進む方向と逆向きに O, A, B, C, D, E とする。互いに異なる 0 でない複素数 α, β, γ が

$0 \leq \arg \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \leq \pi, \quad 4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0, \quad 2\gamma^2 - (3\alpha + \beta + 2)\gamma + (\alpha + 1)(\alpha + \beta) = 0$
を満たし、 α, β, γ のそれぞれが正六角形 $OABCDE$ の頂点のいずれかであるとする。

- (1) $\frac{\beta}{\alpha}$ を求め、 α, β がそれぞれどの頂点か答えよ。
- (2) 組 (α, β, γ) をすべて求め、それぞれの組について正六角形 $OABCDE$ を複素数平面上に図示せよ。

☆複素数平面

→ 式でいくのか. 複素数平面上で
図形的で考えるのか.

→ 具体的に? そのまま変形?

→ $a+bi$? $r(\cos\theta + i\sin\theta)$?

常にいろんな方向の意識を持っておく!
数学Ⅳ特講の複素数平面も参考に.

$$\begin{cases} 0 \leq \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leq \pi \quad \dots \textcircled{1} \\ 4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0 \quad \dots \textcircled{2} \leftarrow \text{同次式} \\ 2r^2 - (3\alpha + \beta + 2)r + (\alpha+1)(\alpha+\beta) = 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

→ $\frac{\beta}{\alpha}$ で解ける
①とこれで
OKそう

ii) $\alpha \neq 0$ より, ②は α^2 で割った

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\beta}{\alpha} + 4 = 0 \quad \text{と同値.}$$

これを $\frac{\beta}{\alpha}$ について解くと,

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} &= 1 \pm \sqrt{3}i \rightarrow \textcircled{1} \text{で絞るの?} \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{極形式?} \end{aligned}$$

このうち①を満たすのは

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i \quad \text{のみである。}$$

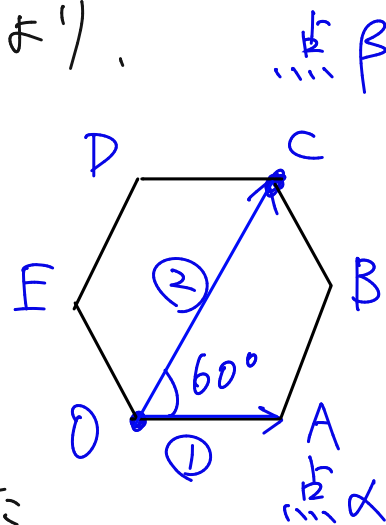
※細かい話.

$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i$ のもと, $\textcircled{3}$ を満たす (α, β, r) が
存在するかどうかを確認しないと確定しないの
では? → 今回は α, β, r が存在すること
は前提なので, $\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i$ で確定でOK.

α と β の図形的な情報
 $\rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ の極形式が役に立つ.

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ より,}$$

点 β の O からの距離は
 点 α の O からの距離の
 2倍であり、点 β は O を
 中心に点 α を $\frac{\pi}{3}$ 回転させた
 点となる。



正六角形 $OABCDE$ において、この条件
 を満たすのは、点 α が A 、点 β が C
 のときのみである。

(2) 詳しい初見の試行錯誤は
 前回の初見動画で!

γ の候補は3種類

$\rightarrow \alpha$ との位置関係で $\frac{\gamma}{\alpha}$ は確定する.

$\rightarrow \gamma$ と β を α で表せるので、

③で α を求めればOK! (式でのプロ-4)

$\rightarrow$ ③をそのまま考えるのが「メント」い

$\rightarrow$ 因数分解に気付けると良い

最後に
 図形も

$$\begin{array}{rcl} 2 & \times & -(\alpha+\beta) \quad - \quad -(\alpha+\beta) \\ 1 & & -(\alpha+1) \quad - \quad -(2\alpha+2) \\ 2 & & (\alpha+1)(\alpha+\beta) \quad - \quad (3\alpha+\beta+2) \end{array}$$

$$\text{③より } (2\gamma - (\alpha+\beta))(\gamma - (\alpha+1)) = 0$$

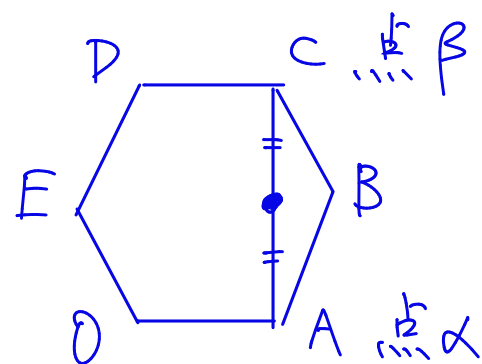
$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+1$$

→ どちらも考えないといけない...?

→ 図形的考察が活きる!

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

→ 点 γ が AC の中点



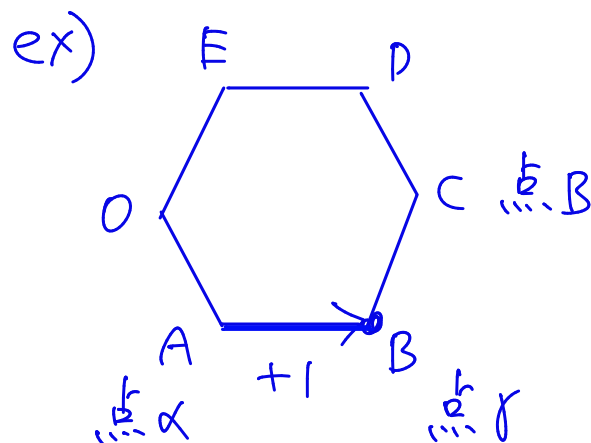
→ ありえない!

→ これを断る.

ここで、 $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ は、点 γ が A と C の中点であることを表すが、点 γ は正六角形の頂点より不適。よって $\gamma = \alpha + 1$ を考えればよい。

$$\gamma = \alpha + 1$$

→ 点 γ が点 α を実軸方向に +1 移動



→ ありえろ!

(i) 点 γ が B と一致するとき、

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{\alpha} &= \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\end{aligned}$$

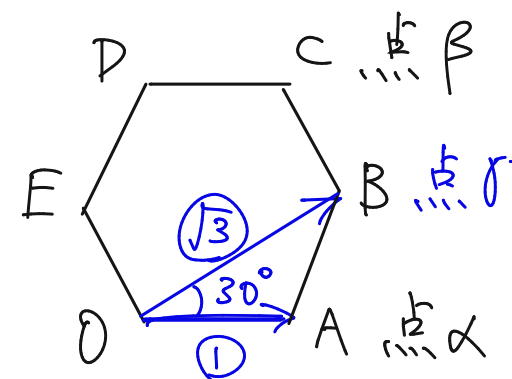
で「あざうで」、 $\gamma = \alpha + 1$ より
 α が求まる!

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \alpha = \alpha + 1$$

$$\frac{1 + \sqrt{3} i}{2} \alpha = 1$$

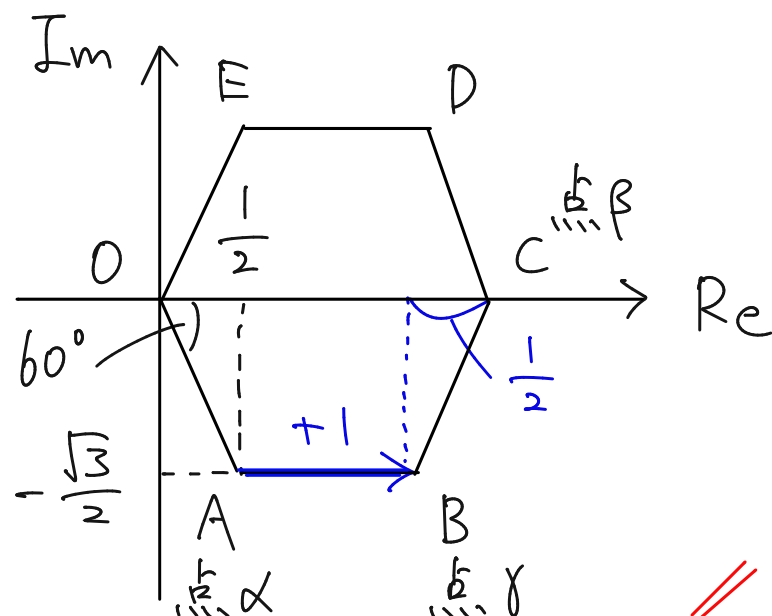
$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2}{1 + \sqrt{3} i} \\ &= \frac{1 - \sqrt{3} i}{2}\end{aligned}$$

→ β と γ は計算してもいいが、複素数平面上で視覚的に出す方がう?



$\frac{\gamma}{\alpha}$ は図形的に!

このとき正六角形 $OABCDE$ と (α, β, γ) は、



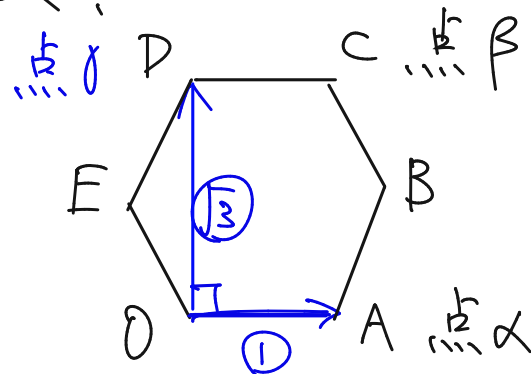
$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, 2, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

(ii) 点 γ が D と一致するとき、

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \sqrt{3}i \quad \text{となる。}$$

$$\gamma = \alpha + 1 \quad \text{より}$$

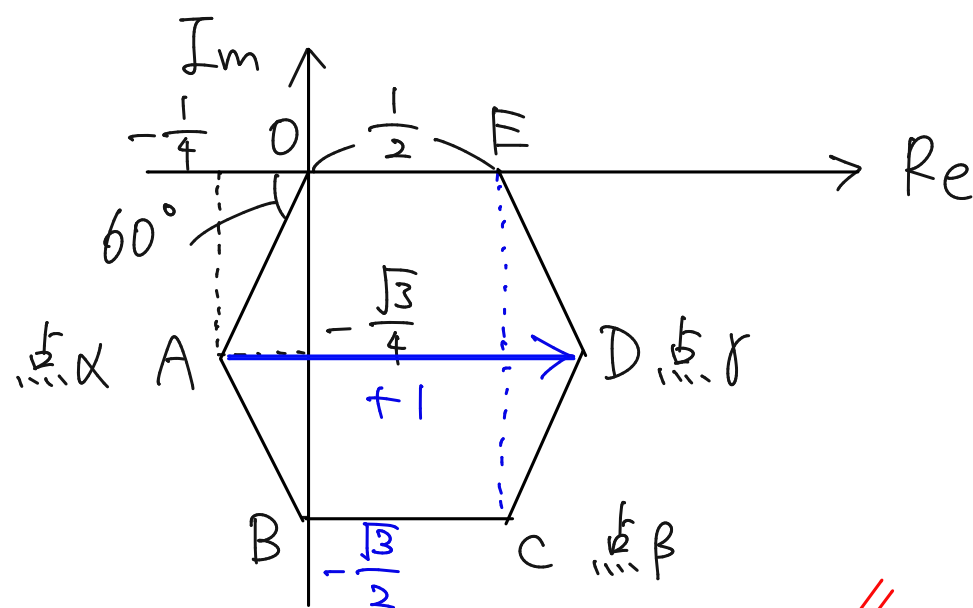
$$(\sqrt{3}i - 1)\alpha = 1$$



$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}i - 1}$$

$$= -\frac{1 + \sqrt{3}i}{4}$$

このとき正六角形 $OABCDE$ と (α, β, γ) は、



$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \right)$$

(iii) 点 γ が E と一致するとき,

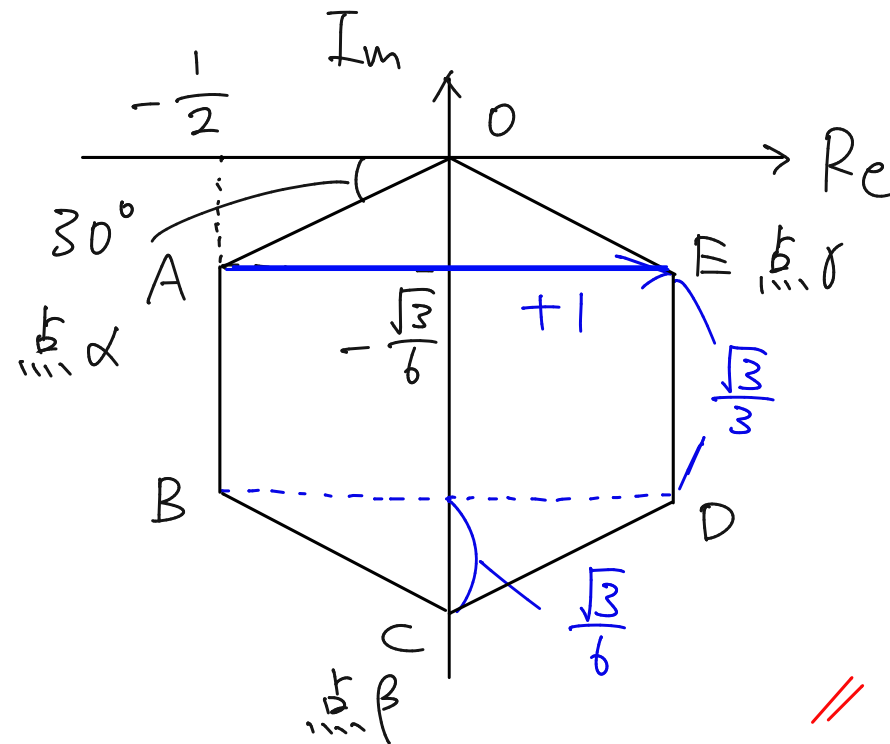
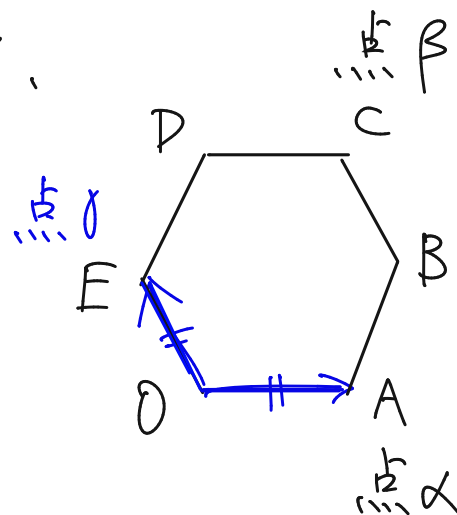
$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{\alpha} &= \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

なので、 $\gamma = \alpha + 1$ より、

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha = \alpha + 1$$

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha = -1$$

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{2}{3 - \sqrt{3}i} \\ &= -\frac{3 + \sqrt{3}i}{6}\end{aligned}$$



$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i, -\frac{2\sqrt{3}}{3}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)$$

☆ $\gamma = \alpha + 1$ からは

そもそも 全て図形的に考えて いてもOK.

例えば (i) について、 B (点 γ) は A (点 α) を複素数平面上で 実軸方向に +1 動かしたところになるので、

