北海道大学 2023 文系第1問

$P(x)$ を x についての整式とし、$P(x)P(-x) = P(x^2)$ は x についての恒等式であるとする。

(1) $P(0) = 0$ または $P(0) = 1$ であることを示せ。

(2) $P(x)$ が $x - 1$ で割り切れないならば、$P(x) - 1$ は $x + 1$ で割り切れることを示せ。

(3) 次数が 2 である $P(x)$ をすべて求めよ。

(1) $P(x)P(-x)=P(x^2)$ ← 恒等式

どんなxを代入しても成立。

$P(0)$が出てくるのは $x=0$ を代入したときだけ!

$P(x)P(-x)=P(x^2)$ は x についての恒等式なので、$x=0$ を代入して

$P(0)P(0)=P(0)$ が成立。

つまり、$P(0)^2=P(0)$

$\Longleftrightarrow P(0)(P(0)-1)=0$

$\Longleftrightarrow P(0)=0$ 又は 1

となって題意は示された。□

(2) 1次式で割れる/割れない

→ 因数定理にピンと来よう!

「$P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる

$\Longleftrightarrow P(\alpha)=0$」 → 詳しくはokkeで。

→ 同値なので、

「割り切れない $\Longleftrightarrow P(\alpha)\neq 0$」

も言える!

$P(x)$ が $x-1$ で割り切れないとき、

因数定理より $P(1)\neq 0$ …① である。

→ 恒等式から $P(1)$ を作り出そう!

使うはずなので、

そして $P(-1)-1=0$ を示せばok

ここで、題意の恒等式に $x=1$ を代入して、$P(1)P(-1)=P(1)$

つまり　$P(1)(P(-1)-1)=0$
となるので，① より

$$P(-1)-1=0$$

を得る。よって，因数定理より
$P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れる。

(3) 次数が決まっている
→ 式を文字でおいて 恒等式を
考えれば定まるはず！安心．
→ (1)(2) を使ってラクできないか
考える．

(1) → ax^2+bx ，ax^2+bx+1 とおける
(2) → 見えにくい… $P(x)$ が $x-1$ で
割り切れる場合もある．場合分け
してもいいけど，結局展開するし…

→ (1) だけ使ってやっていく．
(1) より，$P(x)=ax^2+bx$ 又は
$P(x)=ax^2+bx+1$ とおける。$(a\neq0)$
以下それぞれについて考える。

(i) $P(x)=ax^2+bx$ $(a\neq0)$ のとき，

$$P(x)P(-x)=P(x^2)$$

$$\Leftrightarrow (ax^2+bx)(ax^2-bx)=ax^4+bx^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x^4-b^2x^2=ax^4+bx^2$$ 係数比較！

これが恒等式となるための必要十分条件
は，

$$\begin{cases} a^2=a & \to a\neq0 \text{ より } a=1 \\ -b^2=b & \to b(b+1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a,b)=(1,0)(1,-1) \quad (\because a\neq0)$$

である。

(ii) $P(x)=ax^2+bx+1 \quad (a \neq 0)$ のとき、

$$P(x)P(-x)=P(x^2)$$

$$\Leftrightarrow (ax^2+bx+1)(ax^2-bx+1)=ax^4+bx^2+1$$

$$\Leftrightarrow (ax^2+1)^2-b^2x^2=ax^4+bx^2+1$$

$$\Leftrightarrow a^2x^4+(2a-b^2)x^2+1=ax^4+bx^2+1$$

これが恒等式となるための必要十分条件は、

$$\begin{cases} a^2=a & \to \ a \neq 0 \text{ より } a=1 \\ 2a-b^2=b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \quad (\because a \neq 0) \\ b^2+b-2=0 & \to \ (b-1)(b+2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a,b)=(1,1)(1,-2)$$

である。

以上(i)(ii)より求める $P(x)$ は

$$P(x)=x^2,\ x^2-x,\ x^2+x+1,\ x^2-2x+1$$

の4つである。