大阪大学 2021 文系第1問

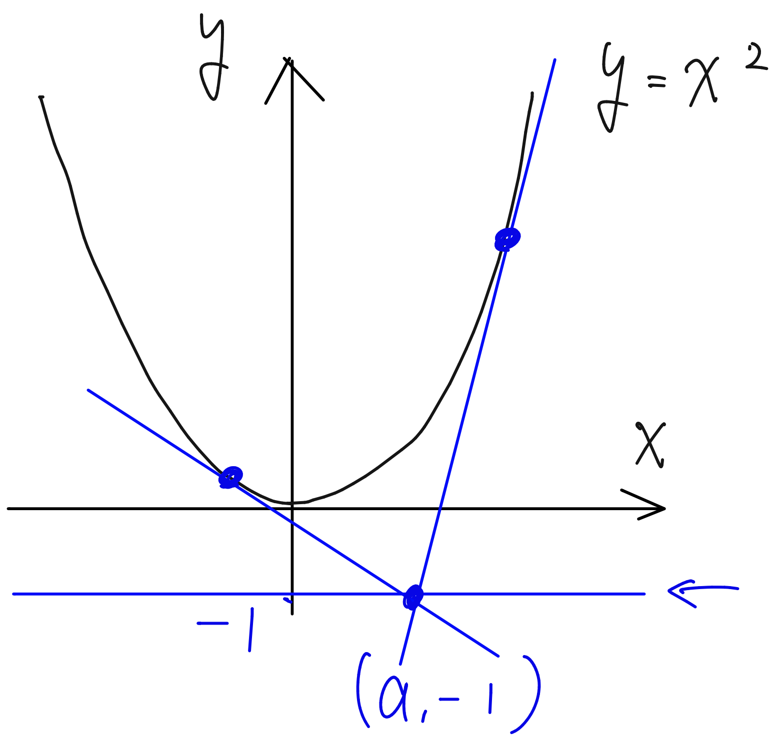
a を実数とする。C を放物線 $y=x^2$ とする。

(1) 点 $A(a,\ -1)$ を通るような C の接線は、ちょうど 2 本存在することを示せ。

(2) 点 $A(a,\ -1)$ から C に 2 本の接線を引き、その接点を P, Q とする。直線 PQ の方程式は $y=2ax+1$ であることを示せ。

(3) 点 $A(a,\ -1)$ と直線 $y=2ax+1$ の距離を L とする。a が実数全体を動くとき、L の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(1)



← Aは この上にある.

☆曲線外の点から引いた接線

→ 曲線上の点を変数でおいて その接線が点を通る条件を立式すると考えやすい.

実数解の問題におきかわる.

良問 1A2B 79/100

→ ただ、特に二次関数の場合は、傾きを変数として（例えば m）曲線外の点を通る傾き m の直線が曲線と接する．と立式してもOK.

↳ この立式がすぐできる.

3次関数でも頑張れば（79/100 を復習）

→ 今回は (2) を見越すと、接点のギロンがあるので、前者がベターかなとなる。

考え方1

C上の点 (t, t^2) での接線の式は、

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

$$y = 2tx - t^2$$ となるので、

これが $(a,-1)$ を通る条件は、

$-1=2ta-t^2$

$t^2-2at-1=0$ …① → この実数解 t が、接点の x 座標、

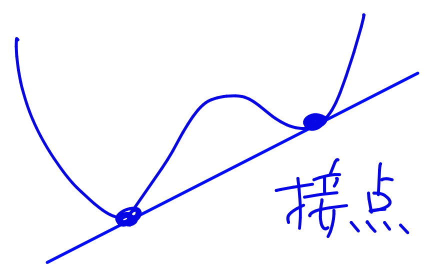
である。ここで、この判別式を D とすると、

$D=a^2+1>0$ なので、①は

異なる実数解 t を2つ持つ。

いま、Cは2次関数であり、接点と接線は1対1に対応するから、

点Aを通るCの接線は2本であることが示された。■



とかはないということ。

考え方2

点Aを通るCの接線は、傾き m を用いて

$y+1=m(x-a)$ → 直線 $x=$ ◯ は表せないけど、今回は問題なし

$y=mx-am-1$

と表せる。

これとCが接する

$\Longleftrightarrow$ $x^2=mx-am-1$ が重解を持つ

(理由は 79/100 で)

$\Longleftrightarrow$ $D=m^2-4(am+1)=0$

$\Longleftrightarrow$ $m^2-4am-4=0$ …② ←m の2次方程式

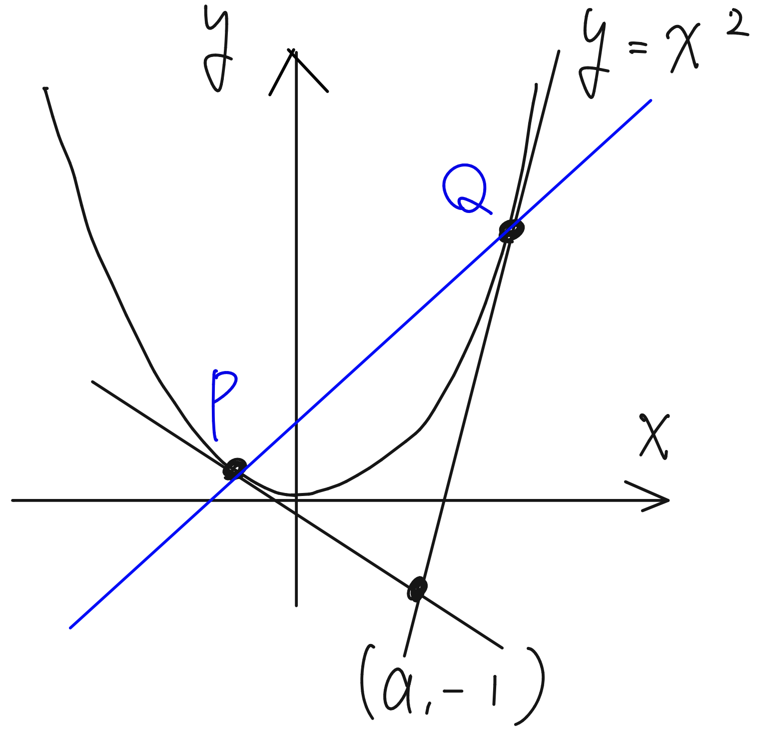
この判別式を D' とすると、

$\frac{D'}{4}=4a^2+4>0$ より、

②を満たす異なる実数解 m は2つある。
つまり、接線も2本ある。

→ 接点はすぐに求まらない点に注意！

(2)



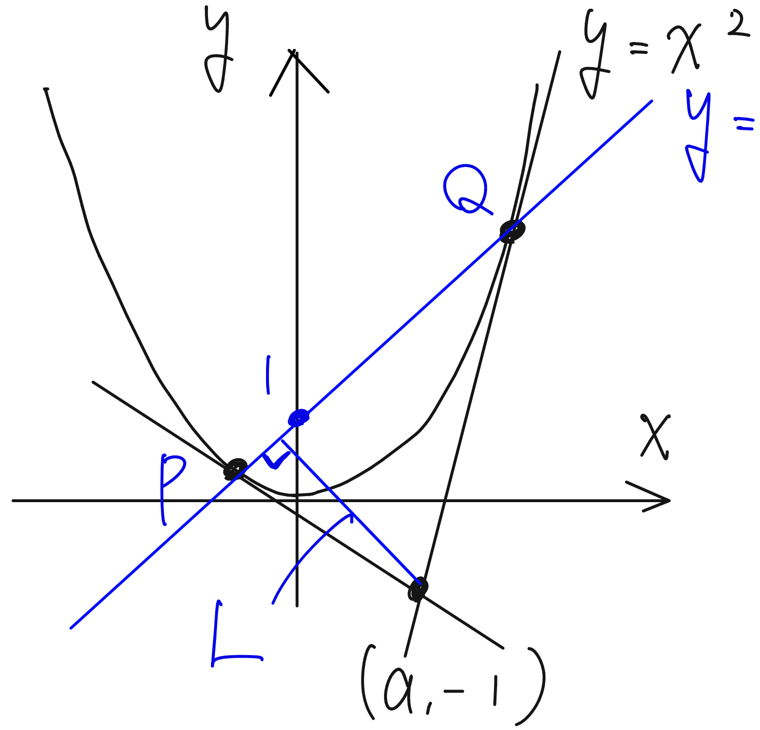
※PとQの順序はわからないので、
どっちでも通るように書きつつ、
必要があれば自分で定めればよい。

Pの x 座標を p、Qの x 座標を q とする。
このとき、(1)の議論より p, q は①つまり
$$t^2 - 2at - 1 = 0$$
の異なる2解である。
よって、解と係数の関係より、
$$\begin{cases} p + q = 2a & \cdots ③ \\ pq = -1 & \cdots ④ \end{cases}$$
を得る。

☆考え方2だと、この条件を得にくい。

PQの方程式は、
$$y - p^2 = \frac{q^2 - p^2}{q - p}(x - p)$$
Qを通るとしても同様。
$$\begin{aligned} y &= (p+q)x - p(p+q) + p^2 \\ &= (p+q)x - pq \\ &= 2ax + 1 \quad (\because ③④) \end{aligned}$$
となり、示された。

(3)



図形的に考察できないか… 思いつかない

$a>0$ と $a<0$ で対称であることはわかる.

→ ラストの妥当性チェックで.

Lを直接求めるか.

$$L=\frac{|2a\cdot a+1+1|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}=\frac{2a^2+2}{\sqrt{4a^2+1}}$$

を最小にする。

Lのルートが嫌

ここで、$L>0$ なので、

Lを最小にする a と、L^2 を最小にする a は等しい。よって L^2 で考える。

$$L^2=\frac{(2a^2+2)^2}{4a^2+1}$$

←4次

←2次

分子は軽くする!!

$$=\frac{4a^4+8a^2+4}{4a^2+1}$$

前回名大でやったワザ!

$$=\frac{a^2(4a^2+1)+7a^2+4}{4a^2+1}$$

$$=\frac{a^2(4a^2+1)+\frac{7}{4}(4a^2+1)+\frac{9}{4}}{4a^2+1}$$

$$=\underline{a^2+\frac{7}{4}}+\underline{\frac{9}{16a^2+4}}$$

→ 相加相乗の香り…

こっちを合わせにいく.

$$= a^2 + \frac{1}{4} + \frac{9}{16a^2+4} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{残りもの}} \quad \cdots ⑤$$

かけると
a^2が消える!!

ここで、$\begin{cases} a^2 + \frac{1}{4} > 0 \\ \frac{9}{16a^2+4} > 0 \end{cases}$ より、

相加相乗平均の不等式を用いると、

$$⑤ \geqq 2\sqrt{\left(\cancel{a^2+\frac{1}{4}}\right) \cdot \frac{9}{\cancel{16a^2+4}\ 16}} + \frac{3}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2}$$

$= 3$ を得る。

等号は $a^2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{16a^2+4}$

$$\Longleftrightarrow a^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$\Longleftrightarrow \quad a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき成立。

よって、Lの最小値は $\underline{\sqrt{3}}$ であり、それは

$\underline{a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$ のときにとる。

↳ 確かに $a>0$ と $a<0$ で対称!

<別解> 相加相乗が見えないとき、
<u>逆像法</u>でとりうる値を考える。
okkeで確認!

$$\frac{4a^4+8a^2+4}{4a^2+1} = k$$ とおく。

→ 実数 a が存在するような k の必要十分条件を求める!

$\Longleftrightarrow 4a^4+8a^2+4=k(4a^2+1)$ → 複2次式！

$\Longleftrightarrow 4a^4+(8-4k)a^2+4-k=0$

これを満たす実数 a が存在することは、

$a^2=s$ として、

$4s^2+(8-4k)s+4-k=0$ …⑥ が

0以上の実数解 s を持つことと同値。

→ 2次方程式の解の配置になった。

ここはしっかり考えよう！

このための k についての必要十分条件を考える。

⑥が実数解を持つ条件は、

$$(4-2k)^2-4(4-k)\geqq 0$$

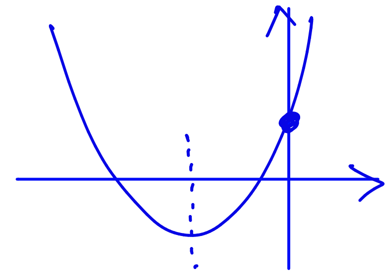
判別式

$$\Longleftrightarrow 4k^2-12k\geqq 0$$

$$\Longleftrightarrow k\leqq 0,\ 3\leqq k \quad \cdots ⑦$$

であり、⑥が0未満の実数解しかもたない条件は、

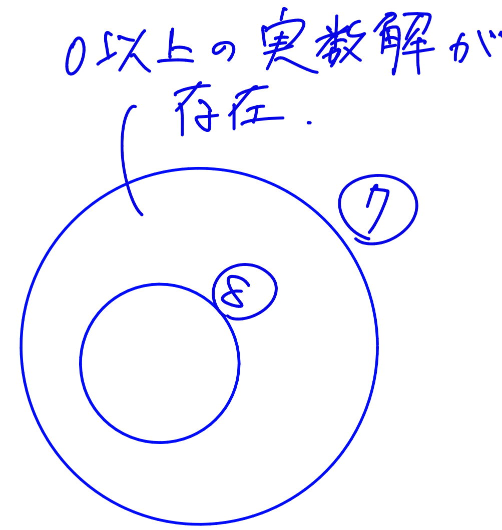
(例のパターン)



$$\begin{cases} k\leqq 0,\ 3\leqq k & \leftarrow D\geqq 0 \\ -\dfrac{4-2k}{4}<0 & \leftarrow 軸 \\ 4-k>0 & \leftarrow 端点 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k\leqq 0,\ 3\leqq k \\ k<2 \\ k<4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow k\leqq 0 \quad \cdots ⑧$$



なので、⑦で⑧に含まれない部分、つまり $k\geqq 3$ が求める条件となる。

よって L^2 の最小値は 3.(以下同)