積分・計算と方程式③　積分方程式

数学Ⅲ特講

良問演習

次の式を満たす実数全体で定義された関数 $f(x)$ を、各々求めよ。

(1) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt$

(2) $\displaystyle\int_1^{x^3} f(t)\,dt=3x^3e^x+s$ （実数 s も求めよ）

ポイント　良問演習1A2B 85問目 +α

積分を含む関数方程式

大きくわけて2つの積分の形

① 定積分が定数となる

例) $\int_a^b f(t)\,dt$ = 定数　（a, b が定数のとき）

※区間が定数でも、中身に x 入っていたら定数にはならない! → なるべく外に出す

② 定積分が変数となる

例) $\int_a^x f(t)\,dt$ = x の式　x によって変わってくる

→ x で微分すると関数 f に関する情報が得られる。

※ $\int_a^x f(t)\,dt$ を微分するとどうなるか?

$f(t)$ の原始関数を $F(t)$ とすると、

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^x = F(x) - F(a)$$

よって、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\big(F(x) - \underbrace{F(a)}_{\text{定数}}\big)$$

$$= f(x)$$

積分がとれて $f(x)$ が出てくる!

☆この流れを知っていると、区間が複雑になっても自然に対応できる。
(数Ⅲ範囲の合成関数の微分が活躍)

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\Big(\underline{F(\beta(x)) - F(\alpha(x))}\Big)$$

合成関数の微分

x の関数

$$= F'(\beta(x))\cdot\beta'(x) - F'(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

これらがくっついてくる.

(1) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,\underline{\sin(x-t)}\,dt \quad \cdots ①$

定数

x が含まれてる!!

→ 外に出せる?

①の右辺について.

$$\int_0^{\pi} f(t)\,\underline{\sin(x-t)}\,dt = \sin x \int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt$$

$\sin x\cos t - \cos x\sin t$

└ 定数

$$- \cos x \int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$$

└ 定数

なので,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt = a & \cdots ② \\ \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt = b & \cdots ③ \end{cases} \quad (a, b \text{ は定数})$$

とおくと, ①より

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{\pi}(a\sin x - b\cos x)$$

$$= \left(\frac{a}{\pi} + 1\right)\sin x - \frac{b}{\pi}\cos x \quad \cdots ☆$$

を得る。 → $f(x)$ の形がわかった!!

→ ②③で a, b の式が立つ.

②について.

$$\int_0^{\pi}\left(\left(\frac{a}{\pi}+1\right)\sin t\cos t - \frac{b}{\pi}\cos^2 t\right)dt = a$$

$\cdots ④$

☆ミスを減らすために分割して考えていく.

ここで.

- $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t\cos t\,dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2t}{2}\,dt$ ← 2倍角で次数下げ

$\displaystyle = \left[-\frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^{\pi}$

$= 0$

- $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t+1}{2}\,dt$ ← 2倍角で次数下げ

$\displaystyle = \left[\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t\right]_0^{\pi}$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2}$　なので④より

$\displaystyle -\frac{b}{2} = a \iff \underline{b = -2a}$ …⑤ を得る.

③について.

$$\int_0^{\pi}\left(\left(\frac{a}{\pi}+1\right)\sin^2 t - \frac{b}{\pi}\sin t\cos t\right)dt = b \quad \cdots ⑥$$

ここで. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi}$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2}$

なので⑥より $\displaystyle \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{\pi}+1\right) = b$

$\displaystyle \iff \underline{\frac{a}{2} + \frac{\pi}{2} = b}$ を得る。

⑤を代入すると $\displaystyle \frac{5}{2}a = -\frac{\pi}{2} \iff a = -\frac{\pi}{5}$

となり、⑤より $\displaystyle b = \frac{2}{5}\pi$ となる。

よって、☆より

$$f(x)=\frac{4}{5}\sin x-\frac{2}{5}\cos x$$ となる。

(2) $$\int_1^{x^3} f(t)\,dt = 3x^3e^x + s \quad \cdots ⑦$$

両辺を x で微分してもいいものの、

$f(x^3)$ が出てくる。先に $x^3 = X$ と

置換しておいた方がラクか?(大差なし)

$x^3 = X$ とおくと、

$x = X^{\frac{1}{3}}$ なので、⑦は

$$\int_1^X \underbrace{f(t)\,dt}_{x\text{には関係ない}} = 3Xe^{X^{\frac{1}{3}}} + s$$

両辺を X で微分すると、

$$f(X) = 3e^{X^{\frac{1}{3}}} + 3X\cdot e^{X^{\frac{1}{3}}}\cdot \underline{\frac{1}{3}X^{-\frac{2}{3}}} \quad \left(X^{\frac{1}{3}}\right)'$$

$$= \left(3+X^{\frac{1}{3}}\right)e^{X^{\frac{1}{3}}}$$ ← 必要条件。

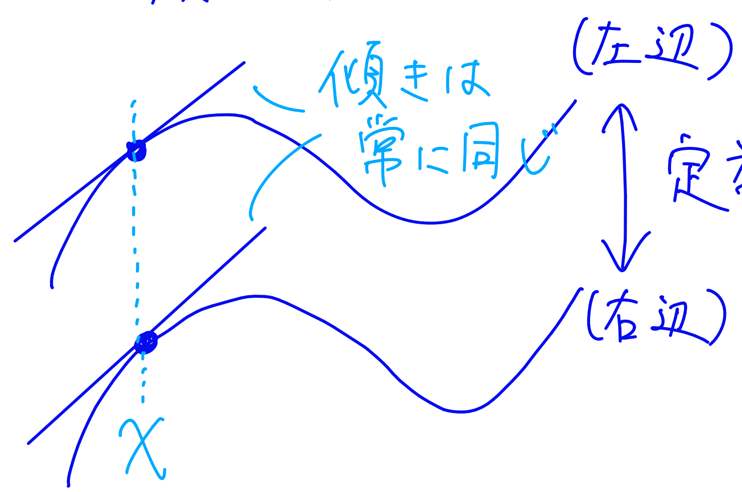
つまり、関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\left(3+x^{\frac{1}{3}}\right)e^{x^{\frac{1}{3}}}$$ であることが必要。

ではどうすれば十分性が示せるのか?

この段階ではまだ、⑦の両辺に定数分の

自由度がある。



定数分の差

の可能性あり。

→ あるxにおいて⑦の両辺の値が等しくなれば、⑦に対し必要十分である。
(ピタッと一致する。関数として等しくなることを言わなくてもOK！)

→ うまいxを取ってくるのが計算上大事.

ここで、⑦で$x=1$を代入すると.

↑定積分が0になり嬉しい

$$0=3e+S$$

$\Leftrightarrow$ $S=-3e$ を得るので.

存在した！よって十分性が示された。

⑦の解は、$f(x)=\left(3+x^{\frac{1}{3}}\right)e^{x^{\frac{1}{3}}}$ であり.

このとき $S=-3e$ となる。

☆代入チェック