

九州大学 2023 理系第1問

以下の問いに答えよ。

- (1) 4 次方程式 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解け。
- (2) 複素数平面上の $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とする。
 $(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$
が成り立つとき、 $\triangle ABC$ はどのような三角形になるか答えよ。

(1) 相反方程式

→ 係数が左右対称のもの

→ x^0 で割って、 $x + \frac{1}{x}$ を置換すれば
次数を下げられるので解きやすい!

→ 0の確認は忘れずに!

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$x=0$ は解ではないので、 x^2 で
両辺割って、

$$x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

解の集合が
変わらない
ってこと

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0 \dots \textcircled{1}$$

ここで $t = x + \frac{1}{x}$ とおくと、

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \text{ より}$$

①は

$$(t^2 - 2) - 2t + 3 = 0$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0$$

$t = 1$ となるので、

$$x + \frac{1}{x} = 1 \quad \swarrow \text{重解}$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

が求める解である。

2コずつ重なる。

(2) どうやって (1) の形にするか?
(初見の対応は前回の動画で)

$$(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$$

↓ ??

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{1変数}$$

- $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$, $\gamma - \alpha$ は、全てバラバラにとれるわけではなく、2つ決まれば残りも自動で決まる。
→ 実質 2変数。

- さらに、その2変数の 同次式 になる
→ 分数にして 1変数化 できる。
→ この方程式が (1) の形になるんじゃないか?

そこで、例えば $\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \beta}$ とかで1変数化してみようが、符号が+になる... (前回)

→ この形は $\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$ の方がありがたい
← 回転移動とわかる

→ これで1変数化すれば
(1) の形が現れる!!

$\alpha - \beta = z$, $\gamma - \beta = w$ とおくと、
点 α, β, γ は三角形を成すので、 $z \neq 0$
さらに、 $\gamma - \alpha = (\gamma - \beta) - (\alpha - \beta)$
 $= w - z$ より、

$$(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0 \quad \text{は}$$
$$z^4 + (-w)^4 + (w - z)^4 = 0 \quad \text{と表せる。}$$

2変数! 同次式!

2 ≠ 0 より、両辺 2^4 で割って、1変数化!!

$$1 + \left(\frac{w}{2}\right)^4 + \left(\frac{w}{2} - 1\right)^4 = 0 \quad \dots (2)$$

→ このまま $\frac{w}{2}$ についてももちろん OK

ここで、 $\frac{w}{2} = v$ とおくと、(2) は

$$2v^4 - 4v^3 + 6v^2 - 4v + 2 = 0$$

$$v^4 - 2v^3 + 3v^2 - 2v + 1 = 0 \quad \text{「バッチリ」}$$

となり、(1) より この解は

$$v = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad \text{である。}$$

つまり、題意の式は

$$\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = \cos(\pm 60^\circ) + i \sin(\pm 60^\circ)$$

と同値なので、

回転移動 → 極形式
にしたい

$\triangle ABC$ は、 $B(\beta)$ を中心に $A(\alpha)$ を
 $\pm 60^\circ$ 回転させた点 $C(\gamma)$ となる。
つまり、正三角形 である。

