微分・不等式⑤　大阪大学 2018 理系第1問

数学Ⅲ特講

過去問

次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ の範囲で不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ が成り立つことを示せ。

(2) x が $x > 0$ の範囲を動くとき、$y = \dfrac{1}{\log(1+x)} - \dfrac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) $x-\frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad (x>0)$

→グラフ情報で示していく.（不等式①）

(i) 左辺について.

$f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ とおき.

$x>0$ で $f(x)>0$ を示す。

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x)$ →正負を知りたい

$= \frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$

よって $x>0$ のもとで $f'(x)>0$ となり.

$f(x)$ は狭義単調増加.

$f(0)=0$ なので、$x>0$ で $f(x)>0$

↑

代入はできる.

詳しくは不等式①で.

が示される。

(ii) 右辺について.

$\log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad (x>0)$

メンドい関数の中にメンドい形.

おきかえた方が微分がラク…？

$1+x=t$ とおいて. → $\sqrt{1+x}=t$ でもOK

$\log t < \frac{t-1}{\sqrt{t}} \quad (t>1)$ を示せばよい。

$g(t) = \frac{t-1}{\sqrt{t}} - \log t$ とおくと.

$g'(t) = \frac{1\cdot\sqrt{t} - (t-1)\frac{1}{2\sqrt{t}}}{t} - \frac{1}{t}$

$= \frac{2t-(t-1)-2\sqrt{t}}{2t\sqrt{t}}$

$$= \frac{t - 2\sqrt{t} + 1}{2t\sqrt{t}}$$

$$= \frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}$$ ← 思い付けなければ分子を微分、など

よって $t>1$ において $g'(t)>0$ となるので
$g(t)$ は狭義単調増加。
$g(1)=0$ なので $t>1$ で $g(t)>0$
が示される。

以上 (i)(ii) より $x>0$ で
$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$ が示される。

(2) $$y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \quad (x>0)$$ について。

→ とりうる値をグラフから調べる。
（log あるし、逆像法的に考えても何も生まれない）

$$y' = \frac{-\frac{1}{1+x}}{(\log(1+x))^2} + \frac{1}{x^2}$$ → 正負を知りたい

↑ $\log(1+x)^2$ と書きまちがえない！

$$= \frac{-x^2 + (1+x)(\log(1+x))^2}{(1+x)x^2(\log(1+x))^2} \cdots ①$$ ←

☆困難を分割する。どこが符号を支配？

$$-x^2 + (1+x)(\log(1+x))^2$$

↑ なんか (1) の右辺と似てる。

ここで、$x>0$ のもとで、

$$-x^2+(1+x)\left(\log(1+x)\right)^2 \geqq 0$$

$$\iff (1+x)\left(\log(1+x)\right)^2 \geqq x^2$$

$$\iff \left(\log(1+x)\right)^2 \geqq \frac{x^2}{1+x} \quad \left(\because\ \begin{array}{r} x>0 \text{ より} \\ 1+x>0 \end{array}\right)$$

$$\iff \log(1+x) \geqq \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad \left(\because\ \begin{array}{r} x>0 \text{ より} \\ \text{両辺正} \end{array}\right)$$

↳ (1) の形が現れた！

(1) より、$x>0$ で $\log(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

なので、$-x^2+(1+x)\left(\log(1+x)\right)^2<0$ と

わかる。よって ① より $x>0$ で $y'<0$。

つまり、y は狭義単調減少となる。…☆

→ あとは どこから来てどこまでいくか。

$\displaystyle\lim_{x\to+0} y$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y$ で考えやすいのは？

ここで、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\boxed{0}$、 ☆☆

以下、$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ について

考える。

$\infty-\infty$ の不定形！

使えるのは (1) の不等式 → 評価していくのか。

→ はさみうちを使うんだろうな…

→ ムリヤリ (1) を変形していこう。

(1) より、$x>0$ で

$$\underbrace{x-\frac{x^2}{2}} < \underline{\log(1+x)} < \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad \text{が成立。}$$

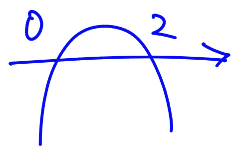
怪しい。

↳ 逆数とれば近づく。

はたして、逆数はとれる？

$$\iff \frac{x(2-x)}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad \cdots ②$$

0<x<2では⊕



0<x<2

十分0に近いxで考えるとき、②の全ての辺は正となり、辺々逆数をとれば、

$$\frac{2}{x(2-x)} > \frac{1}{\log(1+x)} > \frac{\sqrt{1+x}}{x}$$

となり、

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{1}{x} < \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{2}{x(2-x)} - \frac{1}{x} \quad \cdots ③$$

ムリヤリ作る.

を得る。

最左辺について、

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \xrightarrow[x\to+0]{} \frac{1}{2}.$$

不定形

最右辺について

$$\frac{2-(2-x)}{x(2-x)} = \frac{x}{x(2-x)} = \frac{1}{2-x} \xrightarrow[x\to+0]{} \frac{1}{2}.$$

よって③についてはさみうちの原理より、

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

を得る。

これと☆ ☆☆ と $x>0$ での連続性から、$x>0$ で

$$y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲は $0<y<\frac{1}{2}$ //