

平面上の曲線② 楕円

以下の問いに答えよ。

(1) 平面上で、定点 $F(c, 0)$ と $F'(-c, 0)$ からの距離の和が $2a$ になる点の軌跡 E を求めよ。($a > c > 0$ とする)

(2) 軌跡 E 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ。



楕円 いつでも知識を取り出せるように.

式, 図形的特徴, 接線, 面積,
媒介変数表示, について

式

$(c, 0)$ と $(-c, 0)$ からの距離の和が $2a$
となる点の軌跡の式. ($a > c > 0$)

この上の点を (x, y) として,
 (x, y) についての必要十分条件
を求める. (良問 1A2B ⑤⑦)

$(c, 0)$ と $(-c, 0)$ からの距離の和が $2a$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

無いと
どうなる?

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geq 0 \end{cases}$$

両辺2乗!
(良問 1A2B ⑨)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \\ 2a \geq \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2((x+c)^2 + y^2) = (a^2 + cx)^2 \\ a^2 + cx \geq 0 \\ 4a^2 \geq (x+c)^2 + y^2 \quad (\because a > 0) \end{cases}$$

両辺2乗!
両辺2乗!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\ a^2 + cx \geq 0 \\ 4a^2 \geq (x+c)^2 + y^2 \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

ここで、 $a > c$ より、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad \dots \textcircled{2} \\ a^2 + cx \geq 0 \quad \dots \textcircled{3} \\ 4a^2 \geq (x+c)^2 + y^2 \quad \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

②で " $a^2 - c^2 = b^2 > 0$ とおけば", $\rightarrow \underline{a > b}$ に注意.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \textcircled{5} \quad \text{となる。}$$

$\rightarrow$ 楕円の式!
ただ、③④は
成り立つのか?) ☆

⑤より $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ となるので、
 $-a \leq x \leq a$ を得る。 $\rightarrow$ ③④を調査。

このとき、 $c > 0$ を全ての辺にかけて、

$$\begin{aligned} -ac &\leq cx \leq ac \quad \textcircled{3} \text{の形!} \\ \Leftrightarrow a(a-c) &\leq \underline{a^2 + cx} \leq a(a+c) \\ a > 0, a-c > 0 \text{ より } a^2 + cx &\geq 0 \text{ が} \\ \text{成り立つ。よって } \textcircled{5} &\Rightarrow \textcircled{3} \text{は成り立つ。} \end{aligned}$$

他方、④に関して、 $\rightarrow$ ④の形を作りに行く!

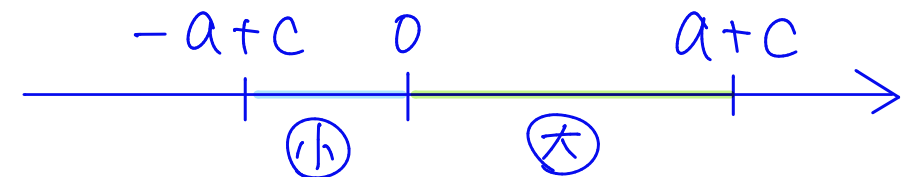
$$-a+c \leq \underline{x+c} \leq a+c$$

ここで、 $a > c > 0$ より

$$\begin{cases} -a+c < 0 \\ a+c > 0 \end{cases} \quad \text{となり、}$$

$$\underline{|-a+c|} = a-c < a+c = \underline{|a+c|}$$

を得るので、



$$0 \leq (x+c)^2 \leq (a+c)^2 \dots \textcircled{6} \quad \text{が成り立つ。}$$

さらに、⑤より

$$\frac{Y^2}{b^2} = 1 - \frac{X^2}{a^2} \leq 1 \quad (2')$$

$$Y^2 \leq h^2 \dots \textcircled{7} \quad \text{と } f_2 \text{ の } \tau'',$$

⑥⑦より)

⑦ よ')

$$\begin{aligned}(x+c)^2 + Y^2 &\leq (a+c)^2 + b^2 \\&= (a+c)^2 + a^2 - c^2 \\&= 2a^2 + 2ac \\&< 2a^2 + 2a^2 \quad (\because a > c > 0) \\&= 4a^2\end{aligned}$$

4a²に持つて<

が"カ"に立つことがわかる。

よって ⑤ $\Rightarrow$ ④ も成立。

よ/上より、 $(5)(3)(4) \Leftrightarrow (5)$ となるので、

求める軌跡の方程式は

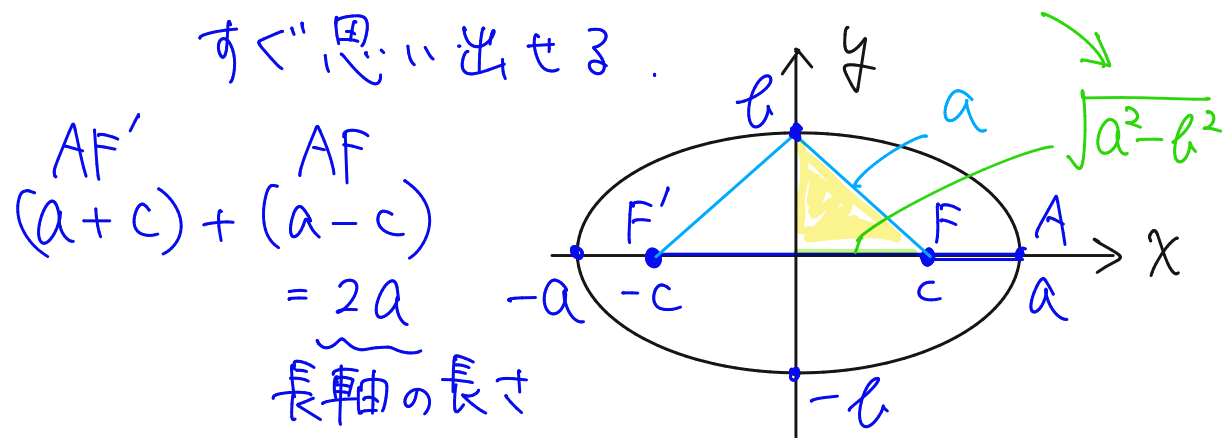
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (f_1, f_2 \text{ L } b^2 = a^2 - c^2)$$

L f_2 f_0

圓形的特徵

- $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ を通る。←式から明らか
- 長軸上に焦点がある。
- 長±の和は長軸の長±と等しい。

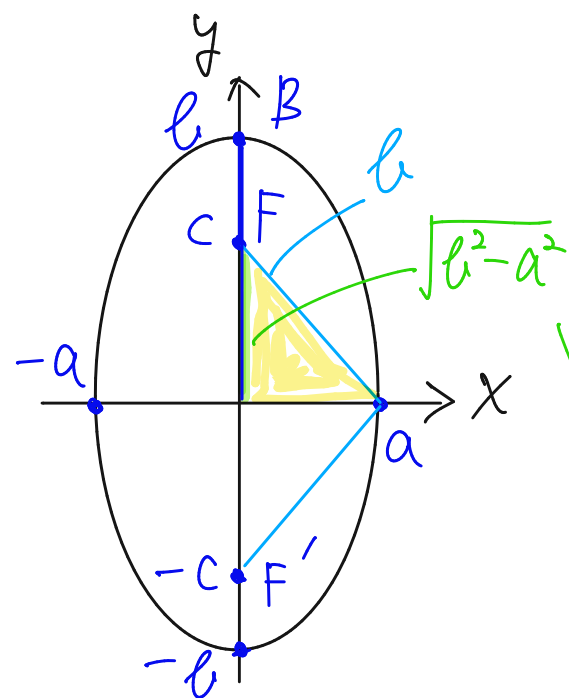
→ 短軸の方の頂点との
キョリを考えれば "焦点の座標" は
すぐ"思い出せる". $\uparrow y$



縦長の楕円はどう表される？

これは、 $(0, c)$ $(0, -c)$ からの距離の和
が一定となる点の軌跡に対応。
距離の和を $2b$ ($b > c > 0$) とすると、

同様に $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で表される。



← 図形的特徴は
全く同じ。

★長軸が縦に。

焦点の座標は
 $(0, \pm \sqrt{b^2 - a^2})$

$BF + BF' = (b - c) + (b + c) = \underline{2b}$ 長軸の長さ

接線 円と同様の式になる。(kを置き換え)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の $(x, y) = (x_0, y_0)$ での
接線の式を求める。

<考え方①>

両辺 x で微分して

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$y_0 \neq 0$ とすると、

$(x, y) = (x_0, y_0)$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \text{ となり、接線の式は}$$

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 = -b^2 x_0 x + b^2 x_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \quad \dots \textcircled{8}$$

ここで (x_0, y_0) は楕円上にあるので

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

よって $\textcircled{8}$ より接線の式は

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \dots \textcircled{9} \text{ となる。}$$

$y_0 = 0$ のとき、 $x_0 = \pm a$ であり、

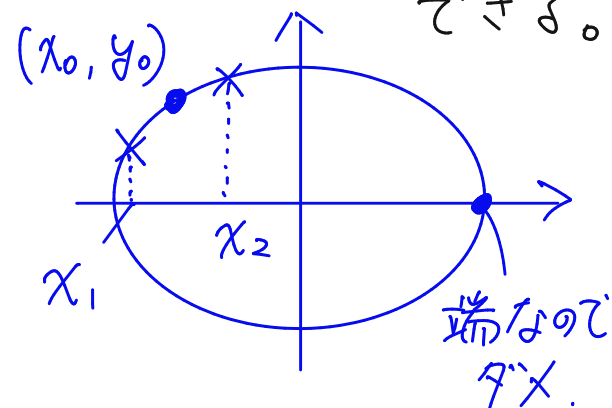
接線の式は $x = \pm a$ (複号同順) となるが、

↑ 図形的に、

これは $\textcircled{9}$ に含まれる。よって $\textcircled{9}$ が接線の式。

<考え方②> $x_0 \neq \pm a$ とすると、楕円上に (x_0, y_0) に十分近い2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ をとり、 $x_1 < x_0 < x_2$ 、 y_1 と y_2 は同符号 とできる。

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$



を辺々引いて

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0$$

$x_1 \neq x_2$ かつ $y_1 + y_2 \neq 0$ より、← why?

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \quad \text{を得る。}$$

↑
2点を通る直線の平均変化率
→ 2点を近づけていくと接線の傾き。

ここで、 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を共に (x_0, y_0) に限りなく近づけていくと、

値は $-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2x_0}{2y_0} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$ に近づき、

これが (x_0, y_0) での接線の傾きになる。
よって接線の式は ...

(以下考え方①と同じ。 $x_0 = \pm a$ のときも
含むことを確認)

面積

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の囲む面積は πab
($a, b > 0$ とする)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \leftarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ へ}$$

y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍した図形を表す。 why?

つまり $x^2 + y^2 = a^2$ の面積 πa^2 の
 $\frac{b}{a}$ 倍 となり、 πab

※ 積分しても OK.

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ で囲まれた図形.}$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a 2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx &= \frac{2b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{2b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{2} \\ &= \underline{\pi ab} \end{aligned}$$

媒介変数表示、1文字で表せる!!

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0) \quad \textcircled{10} \quad \text{上の点. は}$$

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad \text{を満たす } \theta \text{ と}$$

1対1に対応する。

→ よく使う媒介変数表示

($\Leftarrow$) は $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ より明らか。

($\Rightarrow$) について、楕円 $\textcircled{10}$ を y 軸方向に $\frac{a}{b}$ 倍すると、円 $x^2 + y^2 = a^2$ になり、

$\textcircled{10}$ 上の点 (x, y) と、この円上の点 (X, Y) は 1対1 に対応する。

このとき、円周上の点 (X, Y) に対して、

$$\begin{cases} X = a \cos \theta \\ Y = a \sin \theta \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad \text{を満たす } \theta \text{ が必ず1つ}$$

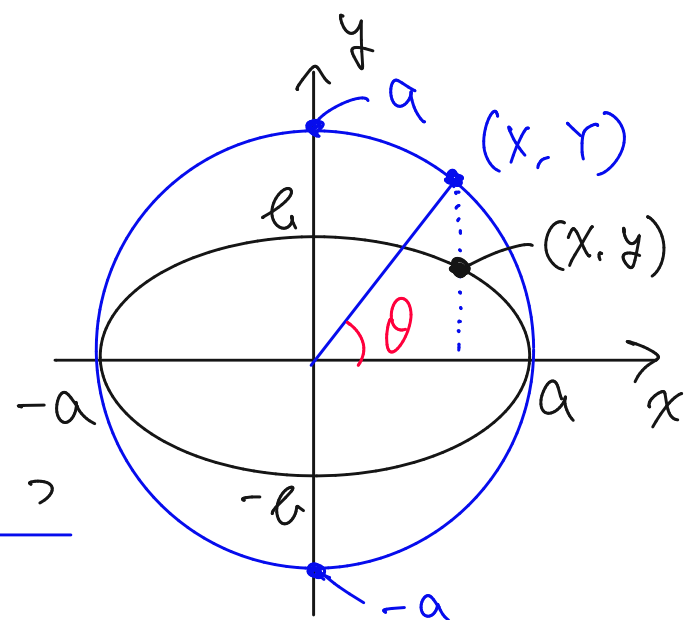
存在し、 θ_0 とする。

いま $\begin{cases} X = x \\ Y = \frac{a}{b} y \end{cases}$

なので代入すると、 θ_0 は

$$\begin{cases} X = a \cos \theta_0 \\ Y = b \sin \theta_0 \\ 0 \leq \theta_0 < 2\pi \end{cases} \quad \text{を満たすことがわかる。} \quad \uparrow$$

示された



($b < a$ としてるが、
 $a \leq b$ でも同様)

★ θ は、拡大縮小した円上での角なので
注意!! 楕円上の (x, y) の角とは違う!