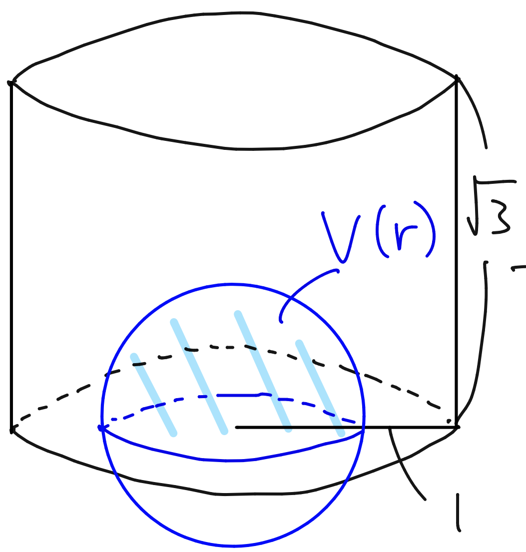
## 東北大学 2022 理系第6問

半径 $1$ の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と、半径が $r$ の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき、直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。

★ よくわからないとき → 可視化＆実験！

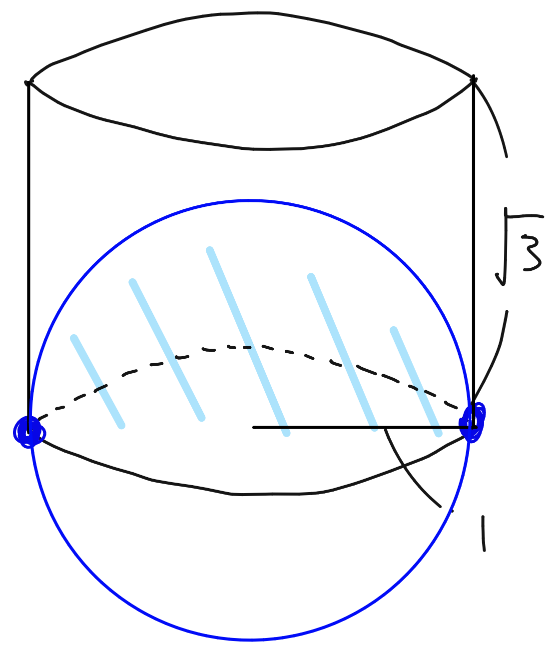
変数はrのみ．これを動かして（小→大），
どこで立式する上での状況が変わるか．
判断していく．

〈検討〉← 答案上には現れない



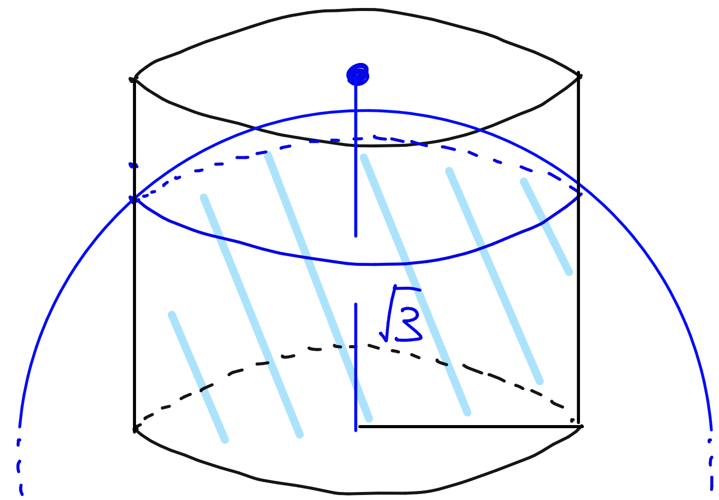

r小さめ

rを大きくしていき，
どこで状況が変わるか．



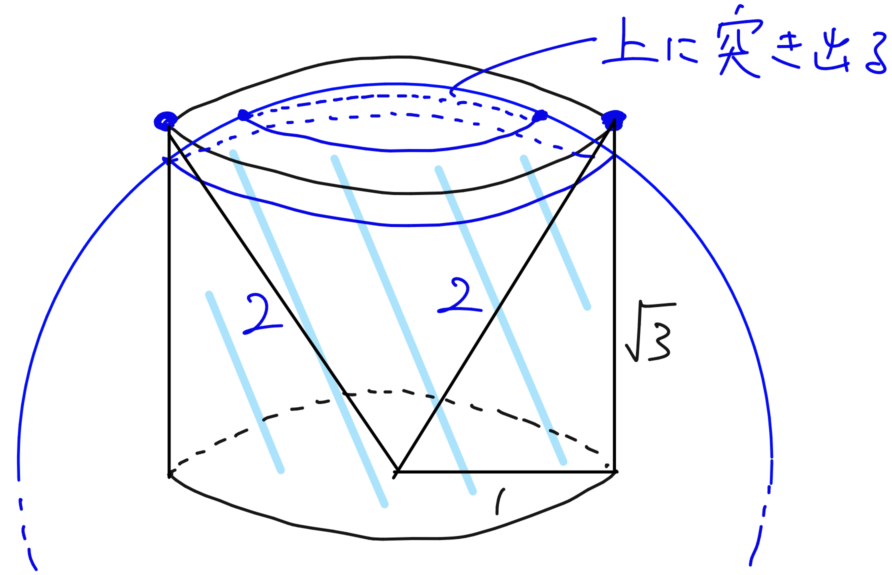

r=1まで
半球

同様

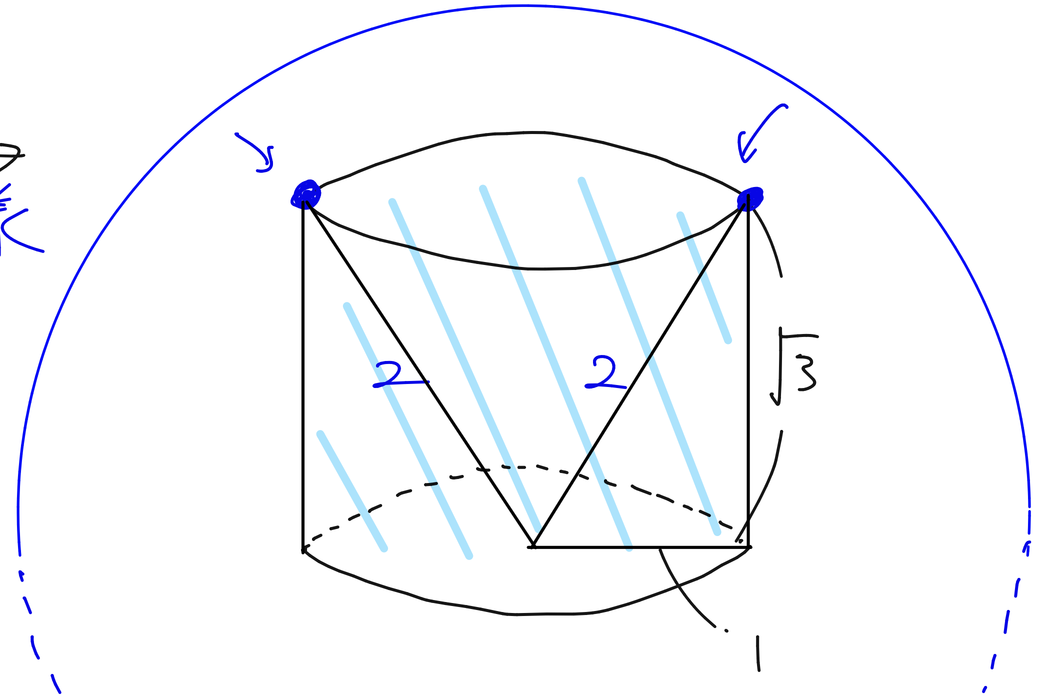



r=√3まで，円柱に
球の端っこが乗る．

同様




r=2まで，円柱に
球のスライスが乗る（頂は外へ）



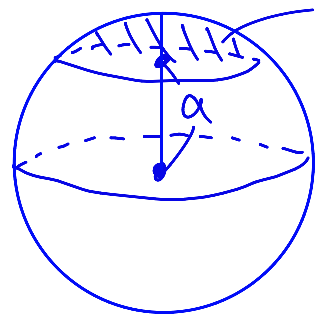

$r \geqq 2$ では直円柱！

以上、場合分けの基準はわかったので、
あとはどう立式するか？
体積 → 回転体であれば回転軸に垂直に
　　　切って積分。
　　→ まずはでも、積分せずに求められる
　　　のであればそれで求める。直円柱，球

→ 今回積分しないといけないのは、
球の端っこ $(1 < r \leqq \sqrt{3})$ と
球のスライス $(\sqrt{3} < r \leqq 2)$ の2つ！
→ それぞれ求めてもよいが、
一般化させておくとラク!!
↳ 変数をおいて、球の端っこの
体積を求めておく。

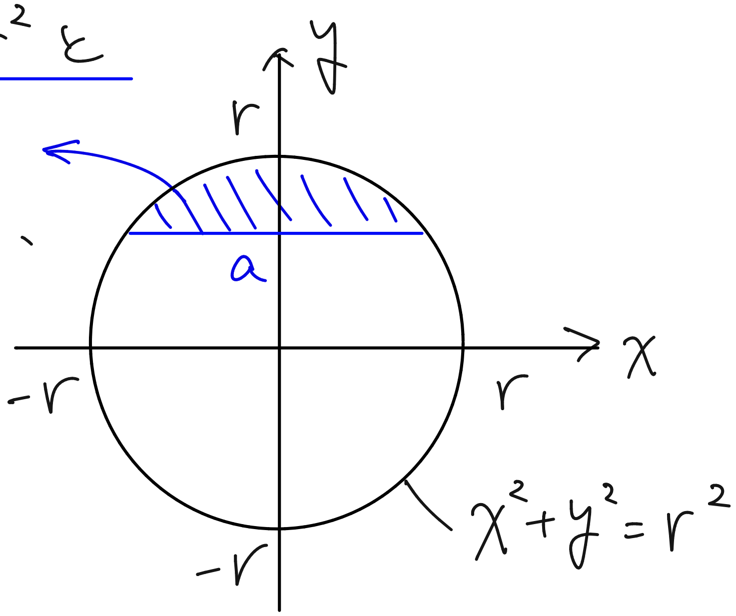
↑ 検討

まず、半径 $r$ の球について、中心からの
距離が $a$ $(0 \leqq a \leqq r)$ の平面で切り、
体積が小さい方の立体の体積を $V_1(a)$ と
おく。




$V_1(a)$ ← 回転体の体積
として積分として
求める。

これは、円 $x^2+y^2=r^2$ と $y=a$ で囲まれる図形 $(a \leqq y \leqq r)$ を、$y$軸周りに一回転してできる立体の体積に等しく、




$$V_1(a) = \int_a^r \pi x^2 \, dy$$

$$= \int_a^r \pi (r^2 - y^2) \, dy$$ ← $r$はここでは定数!

$$= \left[ \pi r^2 y - \frac{1}{3}\pi y^3 \right]_a^r$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 - \pi r^2 a + \frac{1}{3}\pi a^3$$ となる。

これを用いて $V(r)$ を求めると、

(i) $0 < r \leqq 1$ のとき　← 等号はどっちに含めてもOK.

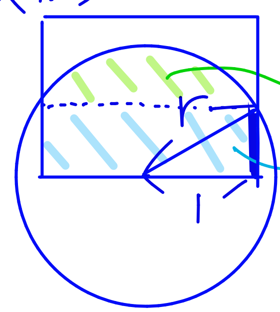
共通部分は半径 $r$ の半球であり、

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

(ii) $1 < r \leqq \sqrt{3}$ のとき

$$V(r) = \underbrace{\pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{r^2-1}}_{直円柱部分} + V_1\left(\sqrt{r^2-1}\right)$$

横から



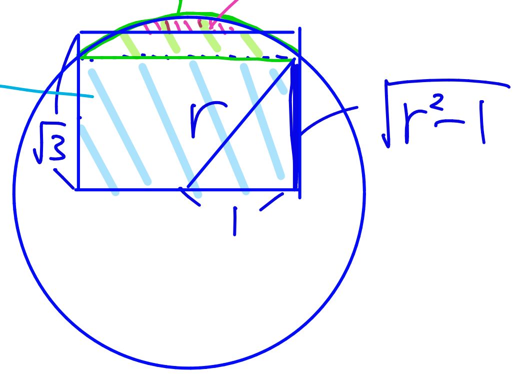

$$= \pi\sqrt{r^2-1} + \frac{2}{3}\pi r^3 - \pi r^2 \sqrt{r^2-1} + \frac{\pi}{3}(r^2-1)\sqrt{r^2-1}$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left(r^3 - \left(\sqrt{r^2-1}\right)^3\right)$$

(iii) $\sqrt{3} < r \leqq 2$ のとき

求めた

$$V(r) = \underbrace{\pi\sqrt{r^2-1}}_{\text{直円柱部分}} + \underbrace{V_1\left(\sqrt{r^2-1}\right)}_{\text{横から}} - V_1(\sqrt{3})$$




$$= \underbrace{\frac{2}{3}\pi\left(r^3 - \left(\sqrt{r^2-1}\right)^3\right)}_{\text{さっきのリサイクル}}$$

$$- \left(\frac{2}{3}\pi r^3 - \sqrt{3}\pi r^2 + \sqrt{3}\pi\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\pi(r^2-1)\sqrt{r^2-1} + \sqrt{3}\pi(r^2-1)$$

$$= \underline{\frac{\pi}{3}(r^2-1)\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{r^2-1}\right)}$$

(iv) $r > 2$ のとき、

共通部分は<u>直円柱全体</u>であり、

$$V(r) = \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \underline{\sqrt{3}\pi}$$

以上(i)〜(iv)より、

$$V(r) = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi r^3 & (0 < r \leqq 1) \\ \frac{2}{3}\pi\left(r^3 - \left(\sqrt{r^2-1}\right)^3\right) & (1 < r \leqq \sqrt{3}) \\ \frac{\pi}{3}(r^2-1)\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{r^2-1}\right) & (\sqrt{3} < r \leqq 2) \\ \sqrt{3}\pi & (r > 2) \end{cases}$$

となる。

☆妥当性チェック！

$r = 1, \sqrt{3}, 2$ で連続になるか？？