大阪大学 2023 理系第1問

n を 2 以上の自然数とする。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n} (-x)^{k-1} \right\} \leqq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n(a_n - \log 2)$$

(1) ☆不等式証明
→ いろんな作戦がある。
引き出しを増やして、その都度試行錯誤するしかない！
→ 初見でじっくり自分で考えることと、「なぜそう解きたくなるか」をなるべく言語化して、引き出しに足していくのが大事。

☆初見での思考は前回の動画で。
→ いきなり微分，帰納法，面積評価 → ボツ
→ <u>シグマを求められる！</u>道が開ける

$0 \leqq x \leqq 1$ で

$$\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{-x\left(1-(-x)^{n-1}\right)}{1-(-x)}=\frac{-x-(-x)^{n}}{x+1}$$

より，

$$(中辺)=(-1)^{n}\left(\frac{1}{x+1}-1-\frac{-x-(-x)^{n}}{x+1}\right)$$

$$=(-1)^{n}\times\frac{1-(x+1)-\left(-x-(-x)^{n}\right)}{x+1}$$

$$=\frac{x^{n}}{x+1}$$ スッキリ！いけそう。

※もし気付ければ

$$-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}=-\underset{\sim\sim\sim}{(-x)^{0}}-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}$$

とまとめられる！

となるので，示す式は

$$\frac{1}{2}x^n \leqq \frac{x^n}{x+1} \leqq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} \quad \cdots (*)$$

である。

それぞれ整理して示す.

(*)について

(中辺)−(最左辺)

$$= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right)x^n \quad \cdots ①$$

← 正負を調べるなら 積や商の形!

↳ $0 \leqq x \leqq 1$ でもう正負がわかるので、微分不要!!

ここで、$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$\frac{1}{x+1} \geqq \frac{1}{2}$, $x^n \geqq 0$ であるから、

①$\geqq 0$ が示される。

また、(*)について

$$(最右辺) - (中辺) = x^n - \frac{x^n}{x+1} - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

$$= \underline{\frac{x^{n+1}}{x+1} - \frac{1}{2}x^{n+1}} \quad \cdots ②$$

さっきの式の $n \to n+1$ と見抜く!!

であり、上の議論と同様にして

②$\geqq 0$ も示される。

以上より (*) は示された。

(2) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ → 直接は求められん.

↙

直接極限求められん.

→ (1)もあるし、はさみうちだろう.

→ じゃあ(1)からどうa_nの形にするか?

<この形のシグマに見覚えある?>

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k = 2^n$$

この発想使える.

$$\sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_nC_k}{k+1} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

ということで、(1)の全ての辺を$0 \leqq x \leqq 1$で積分すればいいんじゃないか.

(1)で示した式の全ての辺を$0 \leqq x \leqq 1$で積分しても、大小は変わらない。

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^n\,dx = \left[\frac{1}{2(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1$$

最左辺

$$= \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\int_0^1 \left(x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}x^{n+2}\right]_0^1$$

最右辺

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}$$

$$\int_0^1 (-1)^n\left(\frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right)dx$$

$$= (-1)^n\left[\log(x+1) - x + \sum_{k=2}^{n}\frac{(-x)^k}{k}\right]_0^1$$

積分とシグマの順序交換

$$= (-1)^n \left(\log 2 - 1 + \underline{\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k}} \right)$$

ちょっと違う。
合わせにいく。

$$= (-1)^n \left(\log 2 - 1 - \underline{\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}} \right)$$

← (-1) を前に

↓

$k=1$ のとき 1 なので含められる。

$$= (-1)^n \left(\log 2 - \underline{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}} \right)$$

これで a_n になった！

$$= (-1)^n \left(\log 2 - a_n \right)$$

となるので、

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqq \underline{(-1)^n \left(\log 2 - a_n \right)} \leqq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}$$

が成り立つ。

極限を求めるものにそろえる。（$-n$ 倍）

つまり、

$$\frac{n}{2(n+2)} - \frac{n}{n+1} \leqq \underline{(-1)^n n \left(a_n - \log 2 \right)} \leqq -\frac{n}{2(n+1)}$$

であり、

$$\frac{n}{2(n+2)} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2+\frac{4}{n}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{n}{2(n+1)} = -\frac{1}{2+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{-\frac{1}{2}}$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n\left(a_n-\log 2\right)=\underline{-\frac{1}{2}}$$

を得る。