

平面上の曲線⑤ 九州大学 2018 理系第1問

数学Ⅲ特講

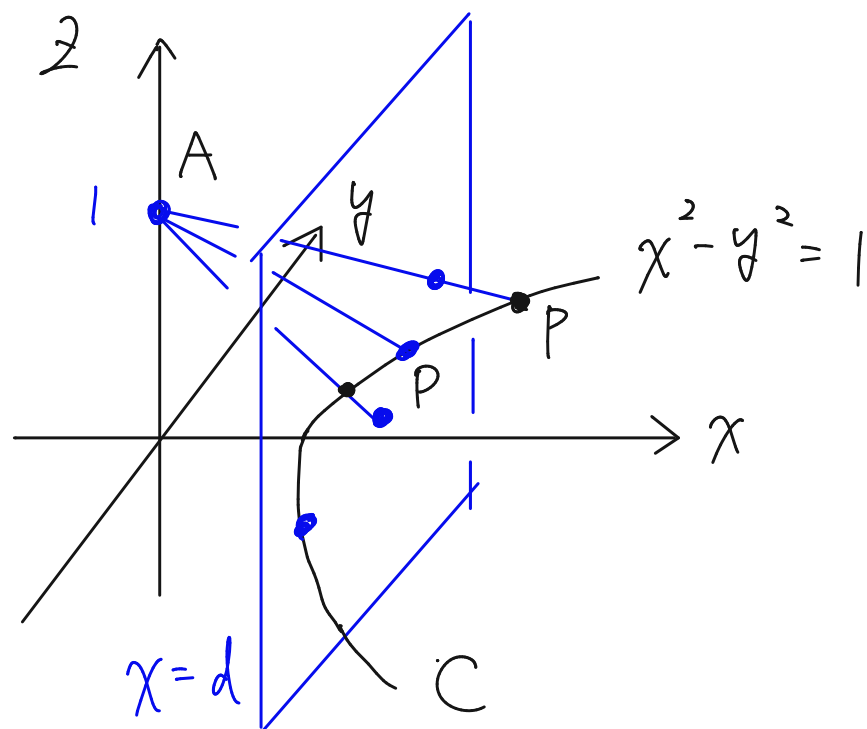
過去問

座標空間において、 xy 平面上にある双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のうち $x \geq 1$ を満たす部分を C とする。また、 z 軸上の点 $A(0, 0, 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき、直線 AP と平面 $x = d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし、 d は正の定数とする。

検索しやすい勉強アプリ okke



解説



<頭の中>

Cをどう表すか.

→ θ で媒介変数表示すれば「文字で表せる」 [1]

→ APをベクトル方程式で考えて、 $x = d$ を代入. [2]

→ θ を動かして (y, z) の軌跡を求める. (逆像法? 順像法?) [3]

C上の点Pは、実数 θ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) を用いて、

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\cos \theta}, \tan \theta, 0 \right)$$

と表せる。← 詳しくは 良問③ を参照。
↑ [1]

よって直線AP上の点X (x, y, z) は実数 t を用いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \theta} \\ \tan \theta \\ -1 \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{OX} = \vec{OA} + t \vec{AP}$$

と表せる。ここで $x = d$ ($d > 0$) とおくと、

$$t = d \cos \theta \text{ となるので、} \uparrow \textcircled{2}$$

直線APと $x = d$ の交点は $\textcircled{1}$ より

$$\begin{cases} x = d \\ y = d \sin \theta \\ z = 1 - d \cos \theta \end{cases} \quad \dots (2) \quad \text{と仮定}。$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = d \\ \sin \theta = \frac{y}{d} \\ \cos \theta = \frac{1-z}{d} \end{cases} \quad \dots (3)$$

軌跡を求める。逆像法が早い。
つまり、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ に θ が
存在するための (x, y, z) について
の必要十分条件を求める。

(3) を満たす実数 θ が $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ に存在

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = d \\ \left(\frac{y}{d}\right)^2 + \left(\frac{1-z}{d}\right)^2 = 1 \\ 1-z > 0 \end{cases}$$

why?

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = d \\ y^2 + (z-1)^2 = d^2 \quad (A) \\ z < 1 \end{cases}$$

が求める軌跡である。



図形的な解釈については
動画の補足にて。(円錐の切断)

