微分・グラフ④　北海道大学 2019 理系第3問

t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。$0, \dfrac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数 $f(x) = \dfrac{x+t}{x(1-tx)}$ を考える。

(1) $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。

(2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を α、極小値を与える x の値を β とし、座標平面上に 2 点 $P(\alpha, f(\alpha)), Q(\beta, f(\beta))$ をとる。t が $0 < t < 1$ を満たしながら変化するとき、線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

(1) 極値をとる点、

$\longleftrightarrow$ 微分係数が0で、前後で導関数の正負が切り替わる

$\downarrow$

関数の増減を調べればOK.

※ 3次関数だと $f'=0$ が異なる2つの実数解を持つことと、極大極小をとることが同値.

$\longrightarrow$ これも上のことから導かれる例.

$$f(x) = \frac{x+t}{\underbrace{x(1-tx)}_{}}$$

$x(1-tx)$ の微分

$$f'(x) = \frac{x(1-tx) - (x+t)\overbrace{\{1-2tx\}}^{}}{x^2(1-tx)^2}$$

バラして整理

$$= \frac{\overset{0<}{t}\,(x^2+2tx-1)}{\underbrace{x^2(1-tx)^2}_{>0}}$$

← くくっておく.

ここの符号による.

ここで、$x^2+2tx-1=0$ …① の判別式を D とすると、 ← 符号変化が起こるかを調べたい.

$D = t^2+1 > 0$ となるので、

異なる2つの実数解を持ち、それらを $p, q\ (p<q)$ とおく。→ α, β はまだ不明

→ 増減表を書きたいが、$x=0, \frac{1}{t}$ で定義されてないことに気付く.

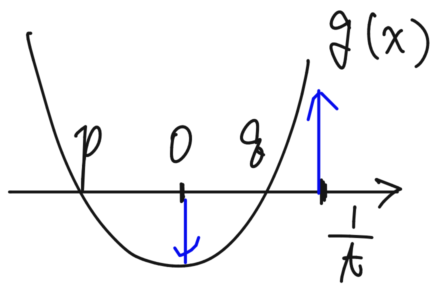
→ ① 自体は $x=0, \frac{1}{t}$ でも考えてしまっている.

→ p, q が 0 や $\frac{1}{t}$ ではないことを確認しないといけない。→ どうする?

①に $x=0$ を代入すると不適
①に $x=\frac{1}{t}$ を代入すると $\frac{1}{t^2}+1=0$ となり
不適。よって ①は $x=0, \frac{1}{t}$ を解に持たない。

☆実はこの時点で極大値・極小値を持つと言うことができます。なぜ？
ただここでは増減表まで書いてみようと思います。
→ p, q と 0 や $\frac{1}{t}$ との大小が必要.

ここで. $g(x)=x^2+2tx-1$ とおくと.
$g(0)<0$, $g\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}+1>0$, $\frac{1}{t}>0$ より.
$g(x)$ の正負は



となるので.

$f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	p	$\cdots$	0	$\cdots$	q	$\cdots$	$\frac{1}{t}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$	/	$+$
$f(x)$	↗		↘	/	↘		↗	/	↗
		極大値				極小値			

となり. 極大値は $x=p$ のとき.
極小値は $x=q$ のときのみとるので.
題意は示された。

(2) 中点の軌跡 → 良問演習 1A2B 61

(1)の議論より. α, β は
$x^2+2tx-1=0$ の2解で、$\alpha<\beta$ を満たす。→ 正体を明らかにしておく.

☆実数 t が $0<t<1$ を動くとき.
実数 α, β は必ず存在！

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -2t & \cdots ② \\ \alpha\beta = -1 & \cdots ③ \end{cases}$$

← あとで使うので下ごしらえ

PQの中点Mの座標を(X, Y)とし、これを求めると、

$$X = \frac{\alpha+\beta}{2} = -t \quad (\because ②)$$

$$Y = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

→ ここから大変そうな計算
分~~母~~なくしておく

$$2Y = f(\alpha)+f(\beta)$$

$$= \frac{\alpha+t}{\alpha(1-t\alpha)} + \frac{\beta+t}{\beta(1-t\beta)}$$

$$= \frac{(\alpha+t)\beta(1-t\beta) + \alpha(1-t\alpha)(\beta+t)}{\underbrace{\alpha\beta}_{=-1}(1-t\alpha)(1-t\beta)}$$

→ α, βについて対称式なので
②③を代入し、tの式にするのが目標。
→ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$や対称性を大事にしながら代入して消していく。

対称か？

$$= \frac{\left(-\beta^2t^2+\beta(1-\underline{\alpha\beta})t+\alpha\beta\right)+\left(-\alpha^2t^2+\alpha(1-\underline{\alpha\beta})t+\underline{\alpha\beta}\right)}{-\left(\underline{\alpha\beta}t^2-\underline{(\alpha+\beta)}t+1\right)}$$

代入！

$$= \frac{-(\alpha^2+\beta^2)t^2+2\underline{(\alpha+\beta)}t-2}{-t^2-1} \quad \cdots ④$$

ここで、$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$= 4t^2+2 \quad (\because ②③)$ より、

$$④ = \frac{-(4t^2+2)t^2-4t^2-2}{-t^2-1} = 2(2t^2+1)$$

よって実数 t が $0<t<1$ を動くとき、

$$\begin{cases} X = -t \\ Y = 2t^2+1 \end{cases}$$

で定められる

2で割るのに注意！($2Y$)

点 (X, Y) の軌跡を求めればよく、

t を消去すると、

$$Y = 2X^2+1$$

必要条件にすぎない

軌跡の式っぽい式

(良問演習 1A2B 57)

十分性の確認

$0<t<1$ より $-1<X<0$ となるので、

求める軌跡は

放物線 $y=2x^2+1 \quad (-1<x<0)$

となる。

※同値性を意識すると、

$$\begin{cases} X = -t \\ Y = 2t^2+1 \\ 0<t<1 \end{cases}$$ なる実数 t が存在する

$$\iff \begin{cases} Y = 2X^2+1 \\ 0<-X<1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y = 2X^2+1 \\ -1<X<0 \end{cases}$$