

大阪大学 2022 理系第4問

$f(x) = \log(x + 1) + 1$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = x$ は、 $x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。
- (2) (1) の解を α とする。実数 x が $0 < x < \alpha$ を満たすならば、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$$

- (3) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき、すべての自然数 n に対して、

$$\alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$$

が成り立つことを示せ。

- (4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ を示せ。

動画や公式を検索しやすいアプリ **okke**



$$(1) \log(x+1) + 1 = x$$

$$\log(x+1) - x + 1 = 0 \rightarrow \text{解けない.}$$

$\rightarrow$ 解の情報を
グラフで捉える!

左辺を $g(x)$ とおくと、
増減を知りたい
ので微分

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 \quad \text{より、}$$

$g(x)$ の増減は

x	$-1 \dots 0 \dots$
$g'(x)$	$+ \ 0 \ -$
$g(x)$	$\nearrow \quad \quad \searrow$

となる。

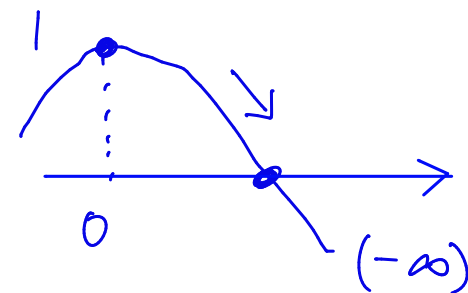
$\rightarrow x > 0$ で "ただ1つ" を
言うには?

$$\text{ここで、} g(x) = x \left(\underbrace{\frac{\log(x+1)}{x}}_{\rightarrow 0} - 1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} \right)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$$

かつ $g(x)$ は $x > -1$ で "連続" なので、
グラフ $y = g(x)$ は $x > 0$ で " x 軸と
ただ1つの共有点をもつ。

つまり、 $g(x) = 0$ は
 $x > 0$ にただ1つの
実数解をもつ。 ■



(2) 試行錯誤は前回の動画で、

$$(1) \text{ の解を } \alpha \Leftrightarrow g(\alpha) = 0, \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(\alpha) = \alpha, \alpha > 0}$$

右側は平均値の定理が見える。

左側は

$$0 < \frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} \rightarrow \underline{\underline{> 0}} \text{ を示す.}$$

$$f(\alpha) - f(x) > 0$$

→ f が単調増加であることを
言えは"よしそう".

題意より $f(\alpha) = \alpha$, $\alpha > 0$ なので、
 $0 < \frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$ ($0 < x < \alpha$) ... ①
 を示す。

・ 左側について、

$$f'(y) = \frac{1}{y+1} > 0 \quad (y > 0) \text{ より、}$$

$f(y)$ は $y > 0$ で 狭義単調増加

よって $0 < x < \alpha$ のとき

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} > 0 \\ \alpha - x > 0 \end{array} \right. \text{ なので}$$

$$\frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} > 0 \text{ が成り立つ。}$$

・ 右側について

定理の
前提!

$f(y)$ は $0 < x \leq y \leq \alpha$ で 連続かつ
微分可能 なので、平均値の定理より

$$\frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} = f'(c) \quad \dots \text{②}, \quad x < c < \alpha$$

を満たす c が存在する。

→ あとは $f'(c) < f'(x)$ を示すだけ。

→ f' が単調減少であることを言えば OK.

$$\text{ここで、} f''(y) = -\frac{1}{(y+1)^2} < 0 \text{ より、}$$

$f'(y)$ は $y > 0$ で 狭義単調減少.

よって $0 < x < c$ に対して

$$f'(x) > f'(c) \text{ が成り立つので、}$$

② よ') $\frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$ が成り立つ。

以上より ① は示された。 ▢

(3) $\alpha - \frac{x_{n+1}}{f(x_n)} < \frac{1}{2} (\alpha - x_n)$

$\rightarrow \frac{\alpha - f(x_n)}{\alpha - x_n} < \frac{1}{2}$ とできれば
(2) が使える!!

$\rightarrow$ このために $\alpha - x_n > 0$ をまず示す。

・ $\alpha - x_n > 0$ を数学的帰納法で示す。
漸化式で定まるので、帰納法と相性よい!

(i) $n=1$ のとき、

$\alpha - x_1 = \alpha - 1$

$\rightarrow \alpha > 0$ は言ってるけど

まだ $\alpha > 1$ は言えてない。

$\rightarrow$ (1) のグラフに戻る。

(1) の議論において

$g(1) = \log 2 > 0$ よ') $\alpha > 1$ であるので、

$\alpha - 1 > 0$ が成り立つ。

(ii) $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) のとき、

$\alpha - x_k > 0$ を仮定する。

$\rightarrow$ 示したいのは $\alpha - x_{k+1} > 0$
 $\Leftrightarrow \alpha - f(x_k) > 0$

(2) の左側が見える!

$\rightarrow$ 前提を示さないといけない。

$x_k < \alpha$ は OK、 $x_k > 0$ のけ。

ここでまず、 $\chi_1 = 1$ と

$$\chi_{n+1} = \log(\chi_n + 1) + 1 \text{ あり、}$$

帰納的に全ての $n \in \mathbb{N}$ で $\chi_n \geq 1$
が成立。... (*)

(2)の前提から！

よって $1 \leq \chi_k < \alpha$ あり、

(2)で示した左側の不等式から

$$\frac{\alpha - f(\chi_k)}{\alpha - \chi_k} > 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha - f(\chi_k) > 0 \quad (\because \chi_k < \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \chi_{k+1} > 0 \quad \text{が成立。}$$

以上 (i)(ii) あり 全ての $n \in \mathbb{N}$ で

$\alpha - \chi_n > 0$ が成立する。... (**)

$\chi_n > 0$ でもいいが、
あとで使うのでより
きびしく。

よって示すべき不等式は

$$\frac{\alpha - f(\chi_n)}{\alpha - \chi_n} < \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3} \quad \text{となる。}$$

(2)の前提

ここで、 $1 \leq \chi_n < \alpha$ あり (2)で示した

右側の不等式から

$$\frac{\alpha - f(\chi_n)}{\alpha - \chi_n} < \underbrace{f'(\chi_n)} \quad \dots \textcircled{4} \quad \text{が成立立つ。}$$

これが $\frac{1}{2}$ 以下ならOK.

$$f'(\chi_n) = \frac{1}{\chi_n + 1} \text{ であり、}$$

$$\textcircled{(*)} \text{ あり } f'(\chi_n) \leq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ なるので、}$$

$\chi_n \geq 1$

$$\textcircled{4} \text{ より } \frac{\alpha - f(\chi_n)}{\alpha - \chi_n} < \frac{1}{2} \quad \text{つまり } \textcircled{3} \text{ が}$$

示された。 

(4) これは典型テーマ!

(**) と (3) の不等式より

$$0 < \underbrace{\alpha - \chi_n}_{(**)} < \underbrace{\frac{1}{2}(\alpha - \chi_{n-1})}_{(3)} < \dots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\alpha - \underbrace{\chi_1}_1)$$

が割り立ち、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\alpha - \chi_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\alpha - 1)$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ となるので、

はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\underbrace{\alpha - \chi_n}_{\text{定数}}) = 0$$

つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = \alpha$ が示された。 