

九州大学 2024 文系第1問

2つの放物線 $C_1 : y = 2x^2$, $C_2 : y = 2x^2 - 8x + 16$ の両方に接する直線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 2つの放物線 C_1 , C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。



☆ 共通接線

→ 片方で接線を書いて

もう片方で接する条件を立てる.

☆ 曲線や直線が接する

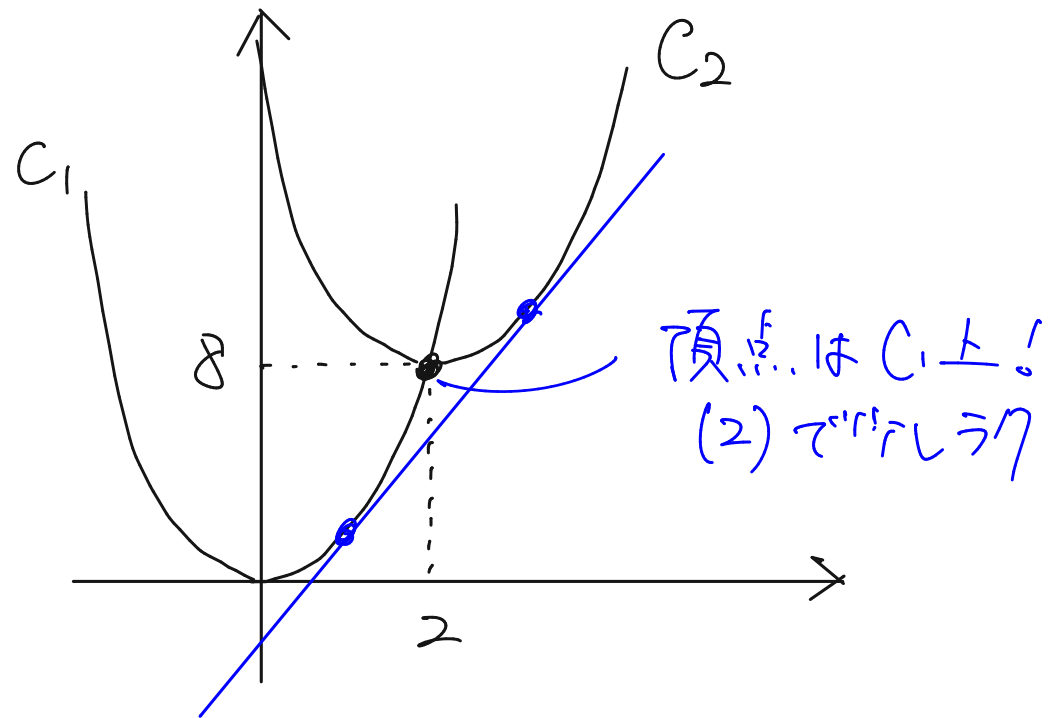
→ ある x で $\begin{cases} \cdot y \text{ の値が等しく} \\ \cdot \text{接線の傾きも等しい} \end{cases}$

→ 整式同士の場合は、

連立した式が重解をもつ条件で
立てるとうなことも多い (良問 88/100)

→ 2次関数では判別式で議論できるのでさらに「 a 」で.

$$C_2 : y = 2x^2 - 8x + 16 \\ = 2(x-2)^2 + 8$$



C_1 上の $X = \mathcal{O}_C$ の接線の式は,

$$y - 2x^2 = \underbrace{4x}_{y' = 4x} (x - x)$$

$$y = 4tx - 2t^2 \quad \text{であり、}$$

これが C_2 と接する条件は.

$$2x^2 - 8x + 16 = 4x^2 - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (4x + 8)x + 2x^2 + 16 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

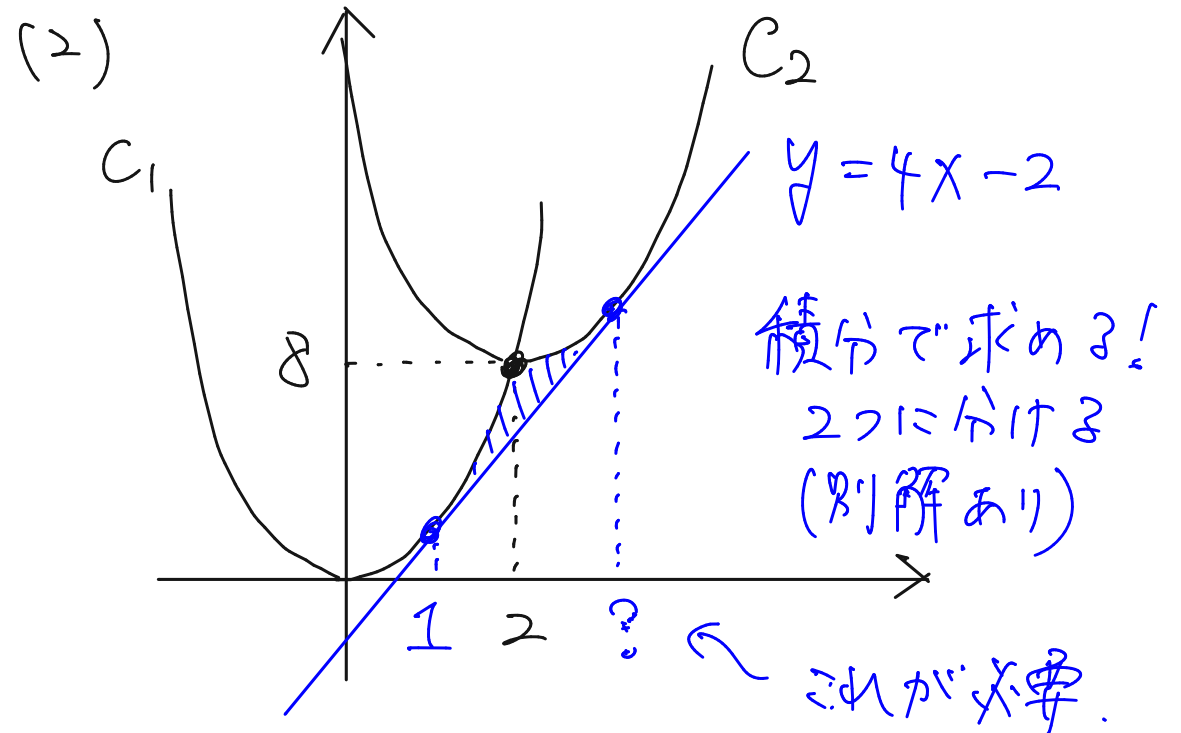
が重解をもつことであり、

それは、判別式を D とすると $D=0$ と同値 である。

$$\begin{aligned} D/4 &= (2x+4)^2 - 2(2x^2+16) \\ &= 16x - 16 \end{aligned}$$

より、 $D=0 \Leftrightarrow$ $x=1$ なので、
求める接線の式は

$$\underline{y = 4x - 2} \quad \text{である。}$$



$x=1$ のとき ①は

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

$$x = 3 \quad \leftarrow \text{接点の } x \text{ 座標}$$

となる。よって求める面積は

$$\int_1^2 (2x^2 - (4x-2)) dx + \int_2^3 (2x^2 - 8x + 16 - (4x-2)) dx$$

★接するときの計算はうまくいく!

$$= 2 \int_1^2 (x-1)^2 dx + 2 \int_2^3 (x-3)^2 dx \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{×、す} \\ \text{こ} \\ \text{う} \\ \text{な} \\ \text{ら} \\ \text{ず!} \end{array}$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} (x-1)^3 \right]_1^2 + 2 \left[\frac{1}{3} (x-3)^3 \right]_2^3$$

※ 1次式のn乗の積分は知っておくと便利!

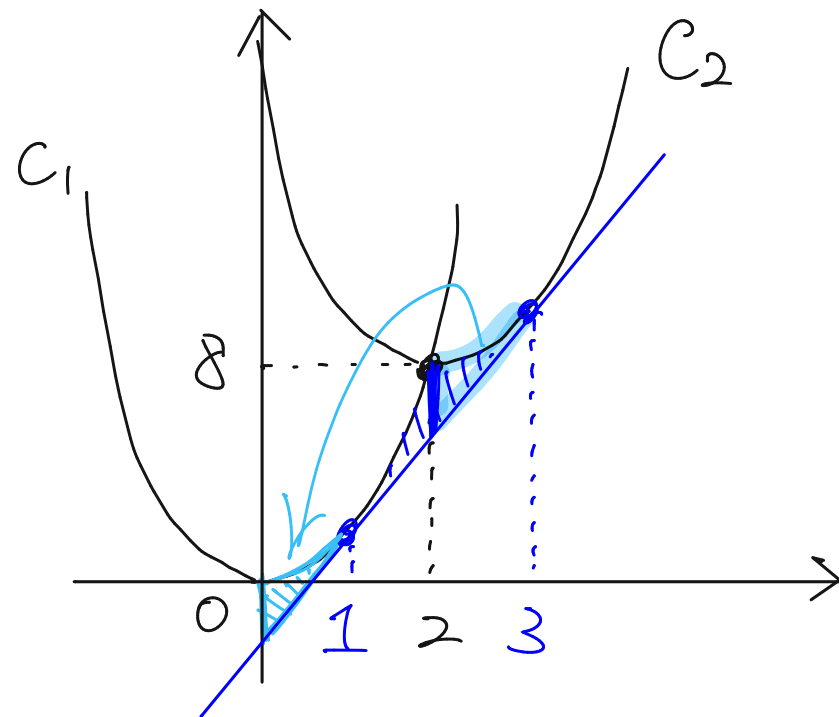
$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

となる。

<別解>



C_1 と C_2 が同じ形なので、理がある
→ 1種類の定積分でOK!

$$\int_0^2 (2x^2 - (4x-2)) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} (x-1)^3 \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3} \quad \text{となる。}$$