

九州大学 2022 理系第5問

xy 平面上の曲線 C を、媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5 \cos t + \cos 5t, \quad y = 5 \sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 区間 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において、 $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。
- (2) 曲線 C の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分、 x 軸、直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また、 C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。
- (4) 曲線 C の概形を図示せよ。

誘惑なく動画や公式を探せるアプリ **okke** 

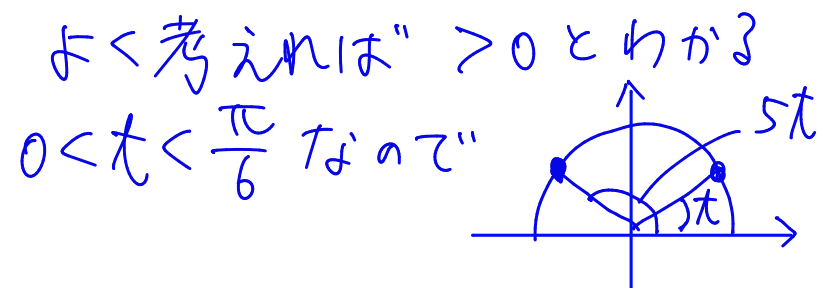
$$\begin{cases} x = 5 \cos t + \cos 5t \\ y = 5 \sin t - \sin 5t \end{cases} \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -5 \sin t - 5 \sin 5t \\ = -5(\sin t + \sin 5t)$$

$$0 < t < \frac{\pi}{6} \text{ のもとで } \begin{cases} \sin t > 0 \\ \sin 5t > 0 \end{cases} \text{ より}$$

$$\frac{dx}{dt} < 0 \text{ が示される。}$$

$$\frac{dy}{dt} = 5 \cos t - 5 \cos 5t \\ = 5(\cos t - \cos 5t)$$



気付かなければ、とりあえず $\frac{dy}{dx}$ 求めて考える。(14)でも使う

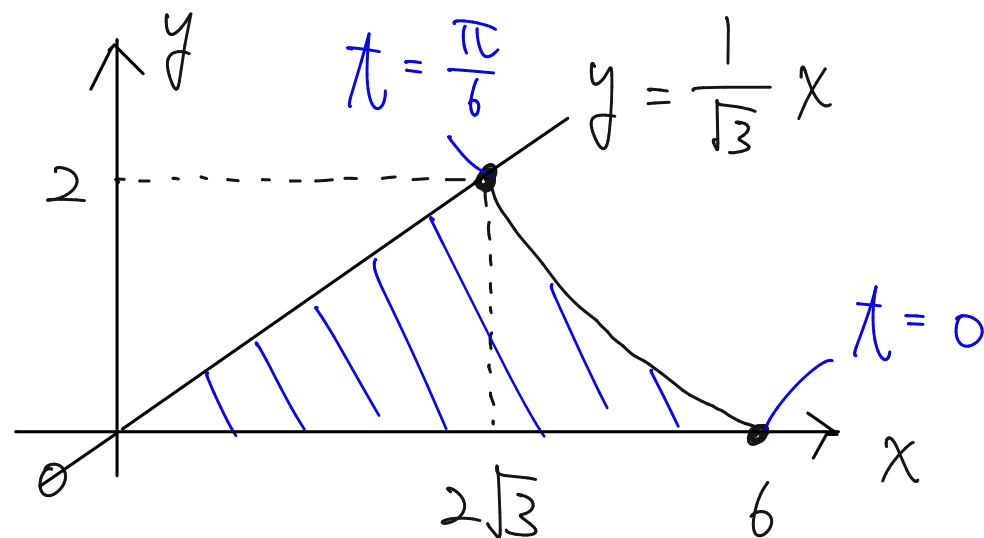
$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ = \frac{\cos t - \cos 5t}{-(\sin t + \sin 5t)}$$

符号は積や商と相性よいのて 和積

$$= \frac{\cancel{2 \sin 3t} \sin 2t}{-\cancel{2 \sin 3t} \cos 2t} \\ = -\tan 2t \text{ となり。}$$

$$0 < t < \frac{\pi}{6} \text{ のもとで } \frac{dy}{dx} < 0 \text{ が示される。}$$

(2) $\tau = 0$ のとき $(x, y) = (6, 0)$
 $\tau = \frac{\pi}{6}$ " $(x, y) = (2\sqrt{3}, 2)$ であり、
 (1) の結論を用いると、
 $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{6}$ での C の概形は以下の通り。



* $\frac{dx}{d\tau} < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$ かつ $\frac{dy}{d\tau} > 0$
 単調に変化!

よって求める面積 S は

$$S = \frac{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2}{2\sqrt{3}} + \frac{\int_{2\sqrt{3}}^6 y dx}{I} \quad \text{となる。}$$

 あとは計算!!
 ↓
 τ に置換

x	$2\sqrt{3} \rightarrow 6$
τ	$\frac{\pi}{6} \rightarrow 0$

*, $dx = -5(\sin \tau + \sin 5\tau) d\tau$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 (5\sin \tau - \sin 5\tau) \times (-5(\sin \tau + \sin 5\tau)) d\tau$$

$$= 25 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 \tau d\tau + 20 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 5\tau \sin \tau d\tau - 5 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 5\tau d\tau$$

1/2-ツで計算!

ここから、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t \, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt \\ &= \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \underline{\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}}\end{aligned}$$

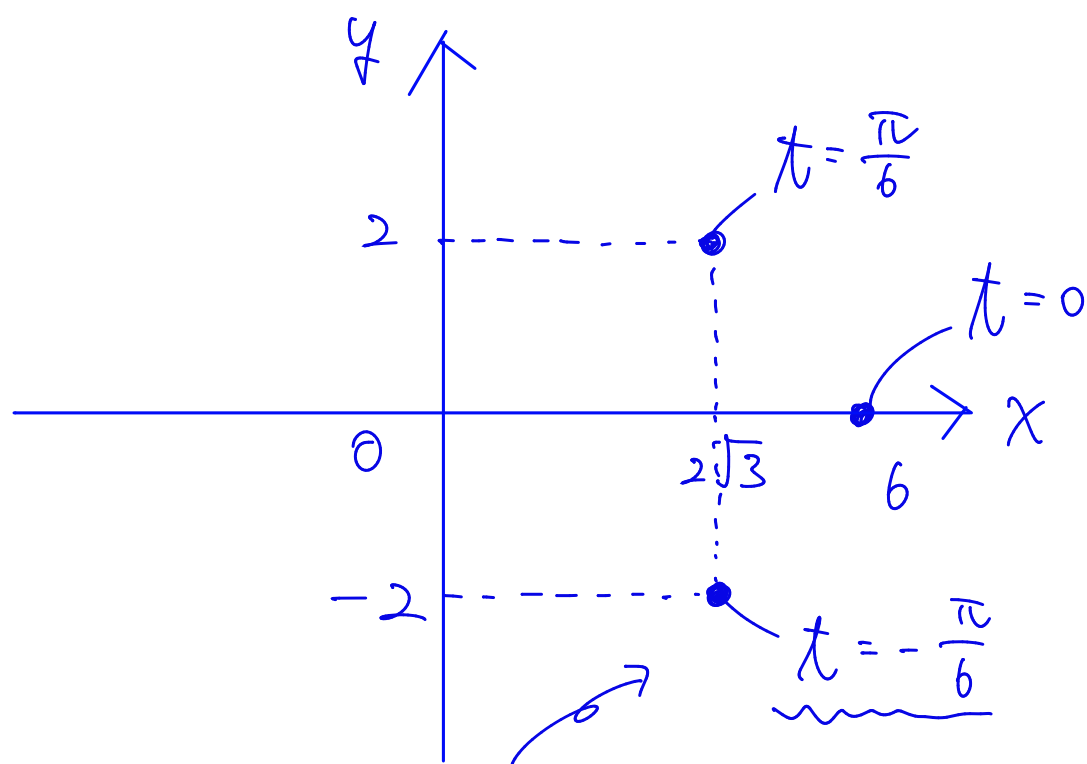
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 5t \sin t \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 4t - \cos 6t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \sin 4t - \frac{1}{6} \sin 6t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= \underline{\frac{\sqrt{3}}{16}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 5t \, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 10t}{2} \, dt \\ &= \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{20} \sin 10t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{40} \quad \text{よ'}.\end{aligned}$$

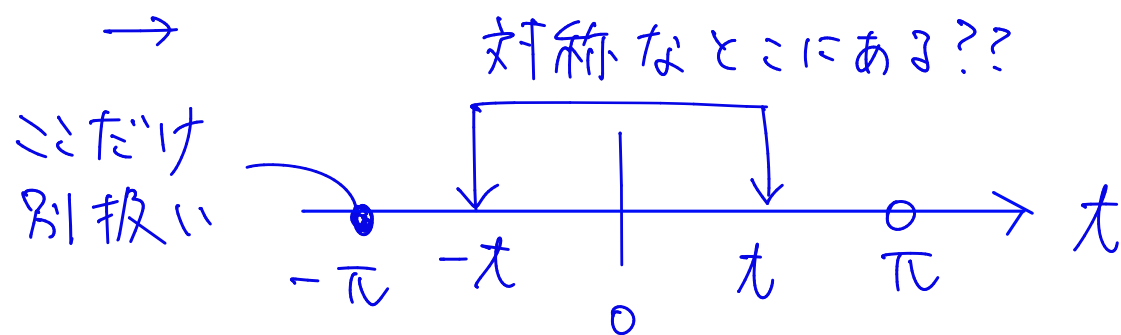
$$\begin{aligned}I &= 25 \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} - 5 \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{40} \right) \\ &= \underline{\frac{5}{3} \pi - 2\sqrt{3}} \quad \text{となる。}\end{aligned}$$

$$S = 2\sqrt{3} + I = \underline{\frac{5}{3} \pi} \quad \text{と求められる。}$$

(3) どのような点同士が対称なのか。が
わかると論証の方向性が見える。
実験しながら確かめる。



$t = -\frac{\pi}{6}$ のとき、 $\begin{cases} x = 2\sqrt{3} \leftarrow \cos \text{は同じ} \\ y = -2 \leftarrow \sin \text{は逆!} \end{cases}$



$t = t_0$ ($-\pi < t_0 < \pi$) での C 上の点 Σ (x_0, y_0) とおくと、 $t = -t_0$ に対応する C 上の点が存在し、その点の座標を (x_1, y_1) とおく。

$-\pi < -t_0 < \pi$ より
定義される!!

→ コール: その座標が $(x_0, -y_0)$ となることを示す。

このとき、

$$\begin{cases} x_0 = 5 \cos t_0 + \cos 5t_0 \\ y_0 = 5 \sin t_0 - \sin 5t_0 \end{cases} \quad \text{であり、}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \cos(-t_0) + \cos 5(-t_0) \\ &= 5 \cos t_0 + \cos 5t_0 = x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 5 \sin(-t_0) - \sin 5(-t_0) \\ &= -5 \sin t_0 + \sin 5t_0 = -y_0 \quad \text{なので、} \end{aligned}$$

(x_1, y_1) と (x_0, y_0) は x 軸に関して
対称となる。... (*)

→ $-\pi < t < \pi$ に対応するところは
 x 軸対称であることが言えた。

さらに、 $t = -\pi$ に対応する点は
 $(x, y) = (-b, 0)$ なので、 x 軸上に
存在する。 ... (**)

以上 (*) (**) より、曲線 C は x 軸
に関して対称であることが示された。■

同様に、 C 上の点において $\frac{\pi}{3}$ 回転
させた点も C 上にある (対応する t
が $-\pi \leq t < \pi$ に存在する) ことを
言う!

$t = t_2$ ($-\pi \leq t_2 < \pi$) での C 上の点、を
 (x_2, y_2) とおいて、これを $\frac{\pi}{3}$ 回転した
点の座標 (x, y) を考える。

複素数平面上で、これらの点が表す
複素数を考えると、

$$x + yi = (\underbrace{x_2}_{\downarrow t_2 \text{ で表す}} + \underbrace{y_2}_{\downarrow t_2 \text{ で表す}} i) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \left((5 \cos t_2 + \cos 5t_2) + (5 \sin t_2 - \sin 5t_2) i \right) \times \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

残して加法定理が◎

ここで、両辺の実部と虚部を比較すると、

$$x = \underbrace{(5 \cos t_2 + \cos 5t_2)}_{\text{実部}} \underbrace{\cos \frac{\pi}{3}}_{\text{実部}} - \underbrace{(5 \sin t_2 - \sin 5t_2)}_{\text{虚部}} \underbrace{\sin \frac{\pi}{3}}_{\text{虚部}}$$

$$= 5 \cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(5\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right)$$

ところが $5\left(\theta_2 + \frac{\pi}{3}\right)$ だと、
 $\theta_2 \rightarrow \theta_2 + \frac{\pi}{3}$ と
 なり都合よい!!
 +2π でいける!

$$= 5 \cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 5\left(\theta_2 + \frac{\pi}{3}\right) \quad \uparrow$$

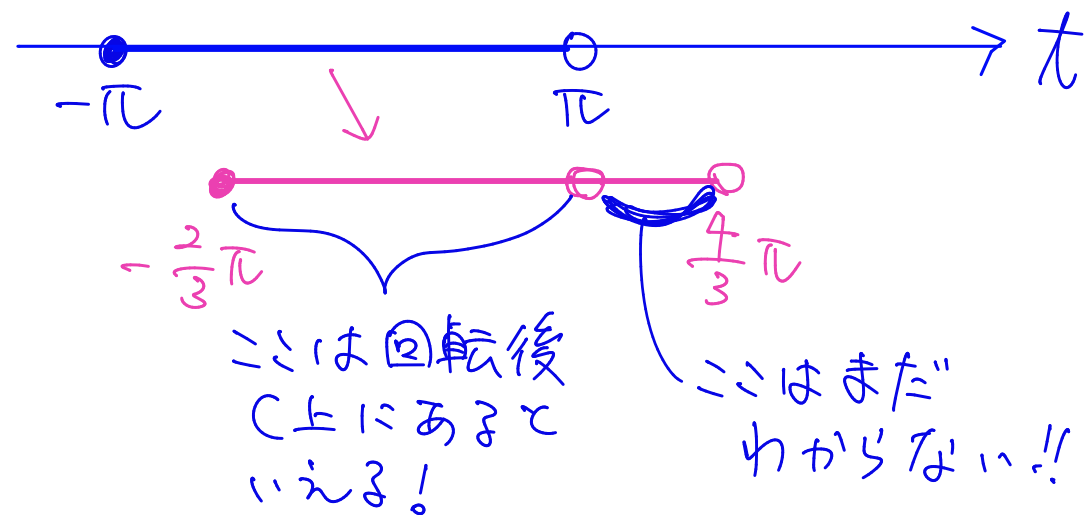
$$y = \left(5 \cos \theta_2 + \cos 5\theta_2\right) \sin \frac{\pi}{3} + \left(5 \sin \theta_2 - \sin 5\theta_2\right) \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 5 \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(5\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right)$$

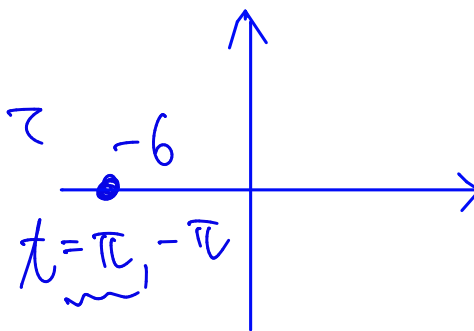
$$= 5 \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{3}\right) - \sin 5\left(\theta_2 + \frac{\pi}{3}\right) \quad \downarrow +2\pi$$

→ つまり、 θ_2 に対応する (x_2, y_2)
 を $\frac{\pi}{3}$ 回転させると、 $\theta_2 \rightarrow \theta_2 + \frac{\pi}{3}$
 とした点となる。

しかし! C は $-\pi \leq \theta < \pi$ なので、
 θ が π に近いと定義から出てしまう!!



グラフ的には θ は 2π ずれて
 戻ってくる
 → これを示す。



$-\pi \leq t_2 < \pi$ のとき、

$-\frac{2}{3}\pi \leq t_2 < \frac{4}{3}\pi$ なのて、

$-\pi \leq t_2 < \frac{2}{3}\pi$ に対応する (x_2, y_2) を
回転させた点、が C 上に存在すること
は示される。

残りの区間についても、

$$t_2 + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{-2\pi} t_2 - \frac{5}{3}\pi \text{ としたい!!}$$

$$x = 5 \cos \left(t_2 + \frac{\pi}{3} \right) + \cos 5 \left(t_2 + \frac{\pi}{3} \right)$$

-2π したい -2π したい

$$= 5 \cos \left(t_2 + \frac{\pi}{3} - 2\pi \right) + \cos 5 \left(t_2 + \frac{\pi}{3} - 2\pi \right)$$

10π 引くけど"
cos の値は同じ!

$$= 5 \cos \left(t_2 - \frac{5}{3}\pi \right) + \cos 5 \left(t_2 - \frac{5}{3}\pi \right)$$

$$y = 5 \sin \left(t_2 + \frac{\pi}{3} \right) - \sin 5 \left(t_2 + \frac{\pi}{3} \right)$$

-2π したい -2π したい

$$= 5 \sin \left(t_2 + \frac{\pi}{3} - 2\pi \right) - \sin 5 \left(t_2 + \frac{\pi}{3} - 2\pi \right)$$

$$= 5 \sin \left(t_2 - \frac{5}{3}\pi \right) - \sin 5 \left(t_2 - \frac{5}{3}\pi \right)$$

となり、

$\frac{2}{3}\pi \leq t_2 < \pi$ のとき

$-\pi \leq t_2 - \frac{5}{3}\pi < -\frac{2}{3}\pi$ なのて、

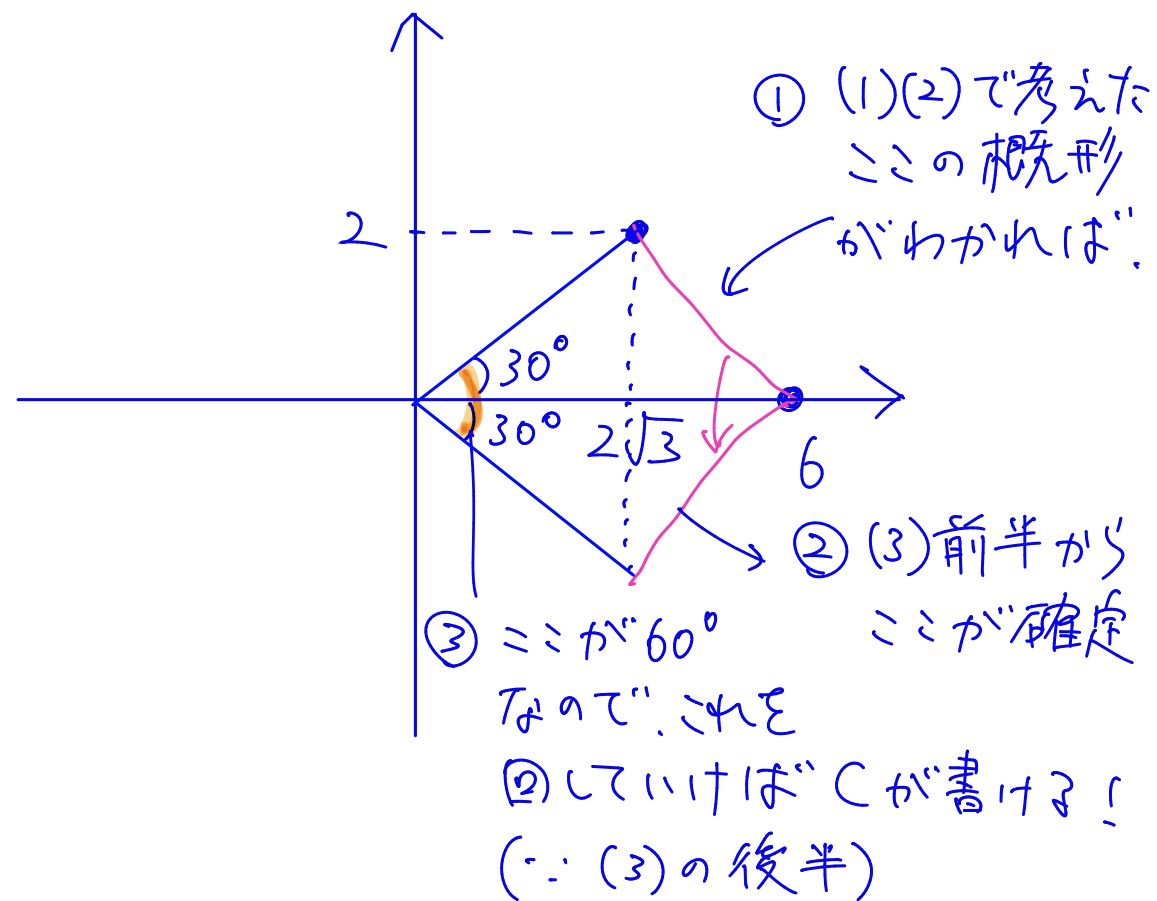
C の定義に入る!!

回転させた点は C 上に
存在する。 これで 網羅 !!

よって 題意は示された。 

(4) 5π とかなので“全区間で増減考えるのは非現実的” ---

(1)~(3) をフル活用!!



$0 < \pi < \frac{\pi}{6}$ において、Cの凹凸を調べる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \quad \star \quad \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}} \text{ としないように!}$$

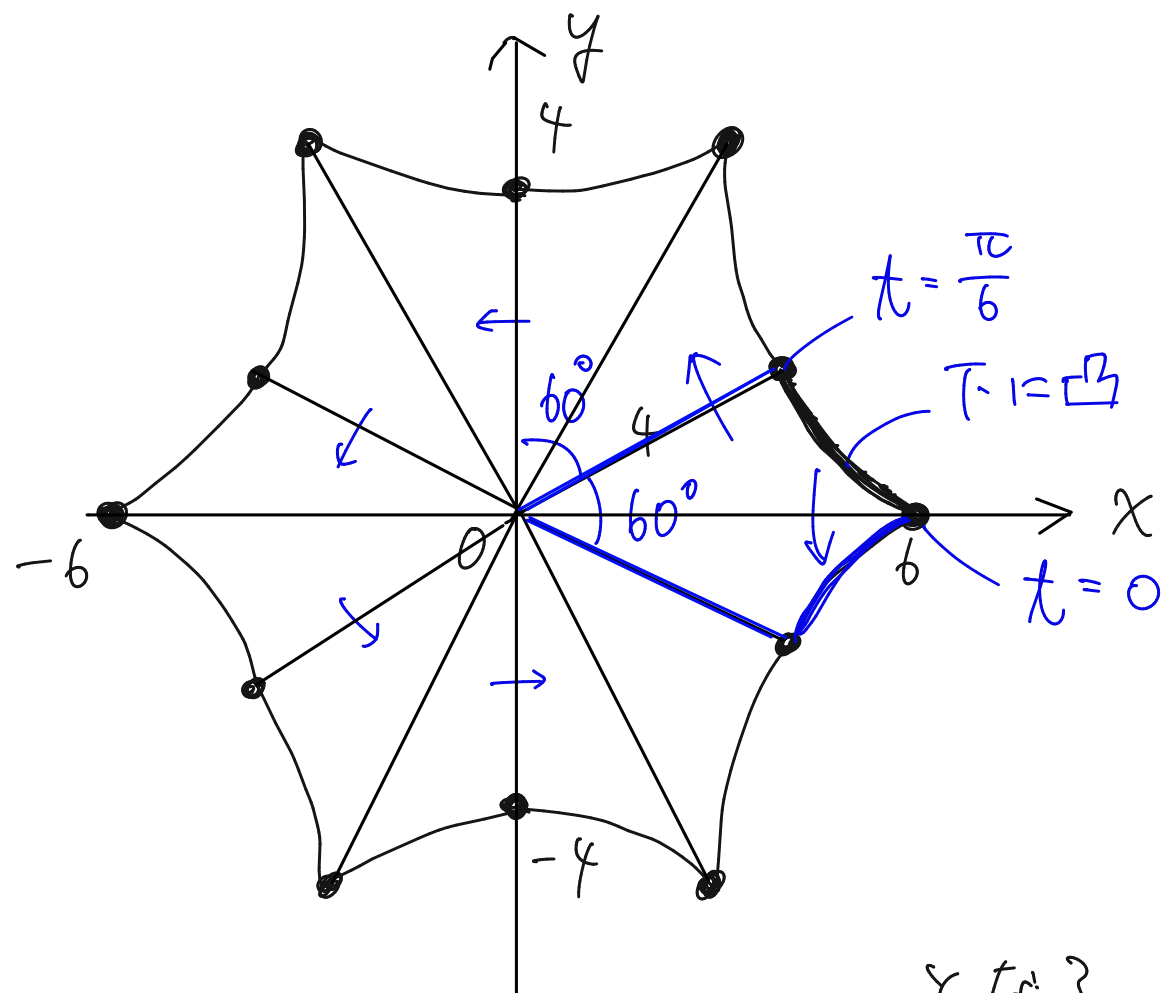
$$= \frac{d}{dt} (-\tan 2t) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= -\frac{2}{\cos^2 2t} \cdot \frac{1}{-5(\sin t + \sin 5t)}$$

$$= \frac{2}{\cos^2 2t (\sin t + \sin 5t)} \text{ よ' },$$

$0 < \pi < \frac{\pi}{6}$ のとき $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ である。

よって、(3)の結論を用いると、Cの概形を描くことができる。



と $t = \frac{\pi}{6}$ 。