

高校数学良問演習 8/100 論理と集合①

以下の_____に「必要条件」「十分条件」「必要十分条件」のいずれかを入れよ（言葉の意味を考えながら）。

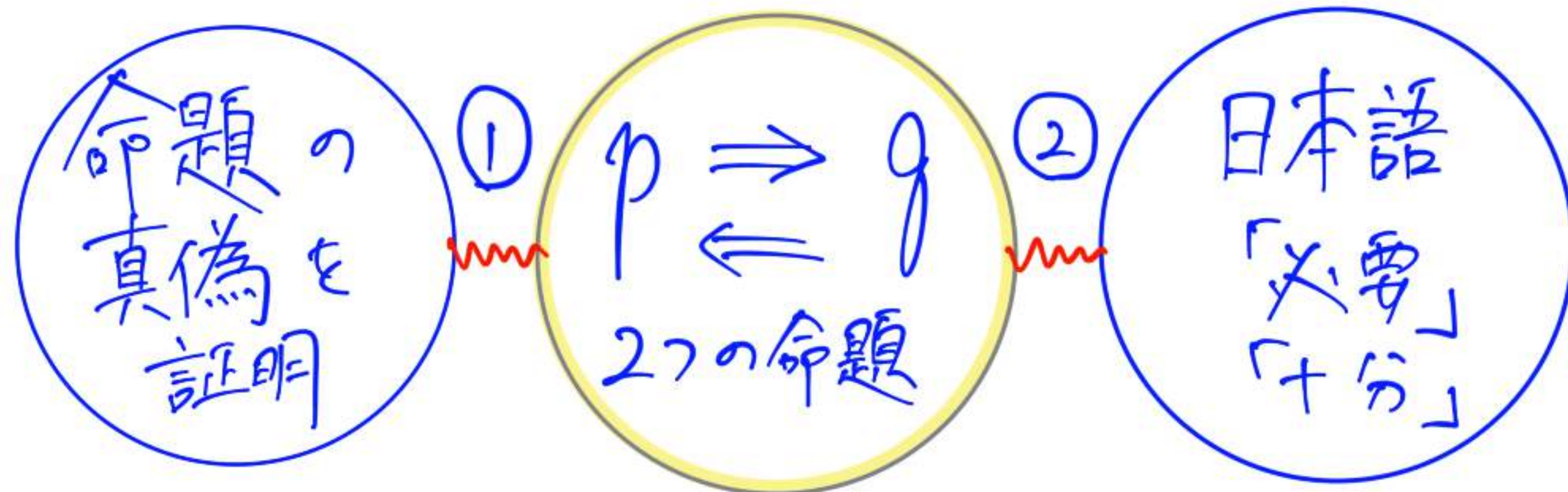
- (1) 受験会場に行くことは、大学に受かるための ×。
- (2) 男子高校生であることは、高校生であるための +。
- (3) $a > b$ であることは、 $a^3 > b^3$ であるための ×+。
- (4) a と b が有理数であることは、 $a+b$ と ab が有理数であるための +。
- (5) $a+b < 3$ であることは、 $|a|+|b| < 3$ が成り立つための ×。

（探求）上の(3)の結論を数学的に証明できますか？

（自由研究）彼氏/彼女がいることは、リア充な高校生活のための_____。

解説

2つの条件 p, q が登場する話



- ① 「 $p \Rightarrow q$ 」「 $q \Rightarrow p$ 」の真偽をどう確かめる？
- ア 直感でわかる $\rightarrow$ (1)(2)(3)
 - イ 反例を見つける (偽のとき) $\rightarrow$ (4)
 - ウ 集合・グラフでとらえる $\rightarrow$ (5)
 - エ 数学的に証明する $\rightarrow$ (探求)
- $\rightarrow p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ という命題の真偽決定

- ② どちらが「広い」条件か考えて、日本語に落とし込む。

- ① $p \Rightarrow q$: p だったら十分 (絶対に) q が成立。
② $q \Rightarrow p$: p という条件が、 q であるために必要

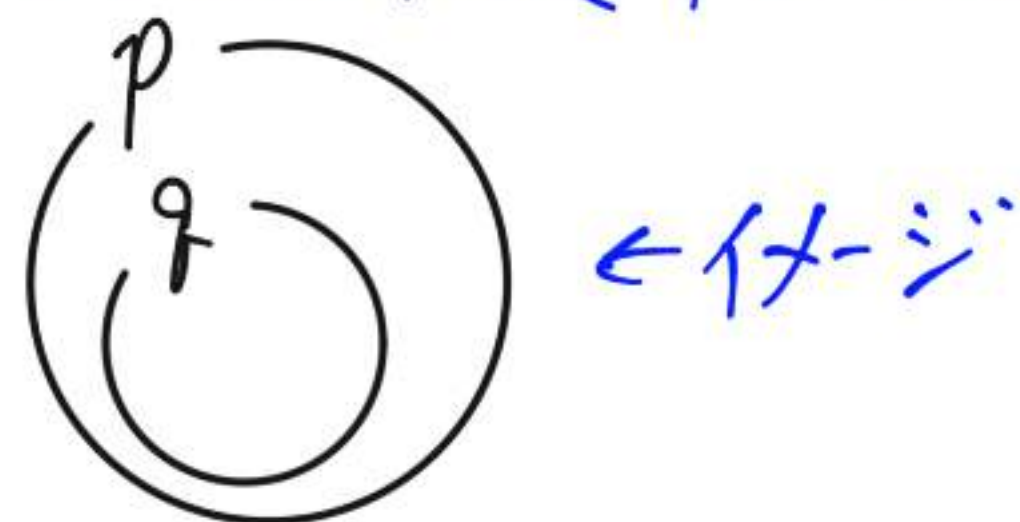


↓
どちらも成立すれば
必要十分条件。

(1) p : 受験会場に行く。
 q : 大学に受かる。

① $(p \Rightarrow q \text{ は? } \textcircled{X})$ ← 直感でわかる。
 $(q \Rightarrow p \text{ は? } \bigcirc)$ ← 直感でわかる。

(たとえば $p \Rightarrow q$ を確認するときは、
 p の条件は成立することを仮定することに注意!)

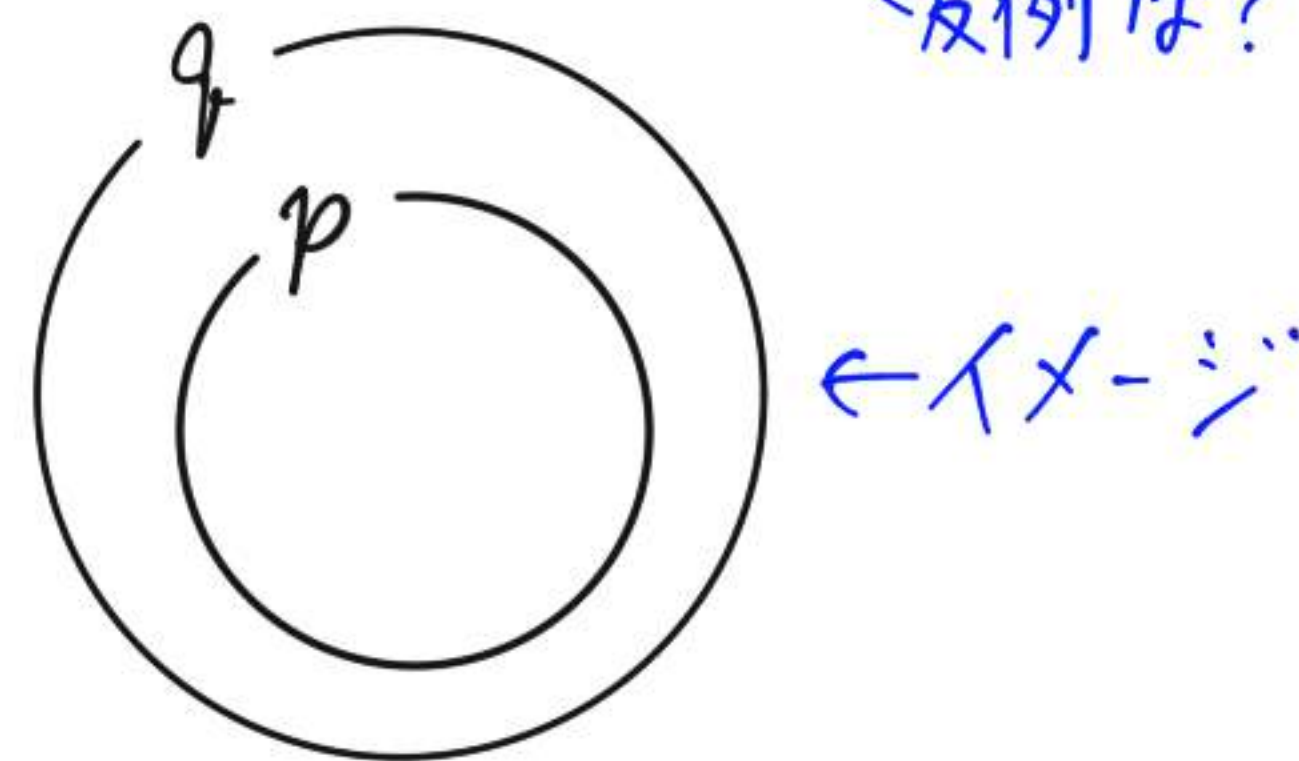


② p は q が成立するための十分条件ではない。
(p だからといって絶対に q が成立するとは限らない)

でも q が成立するには p が必要で、 p は q が成立するための必要条件。 //

(2) p : 男子高校生である。
 q : 高校生である。

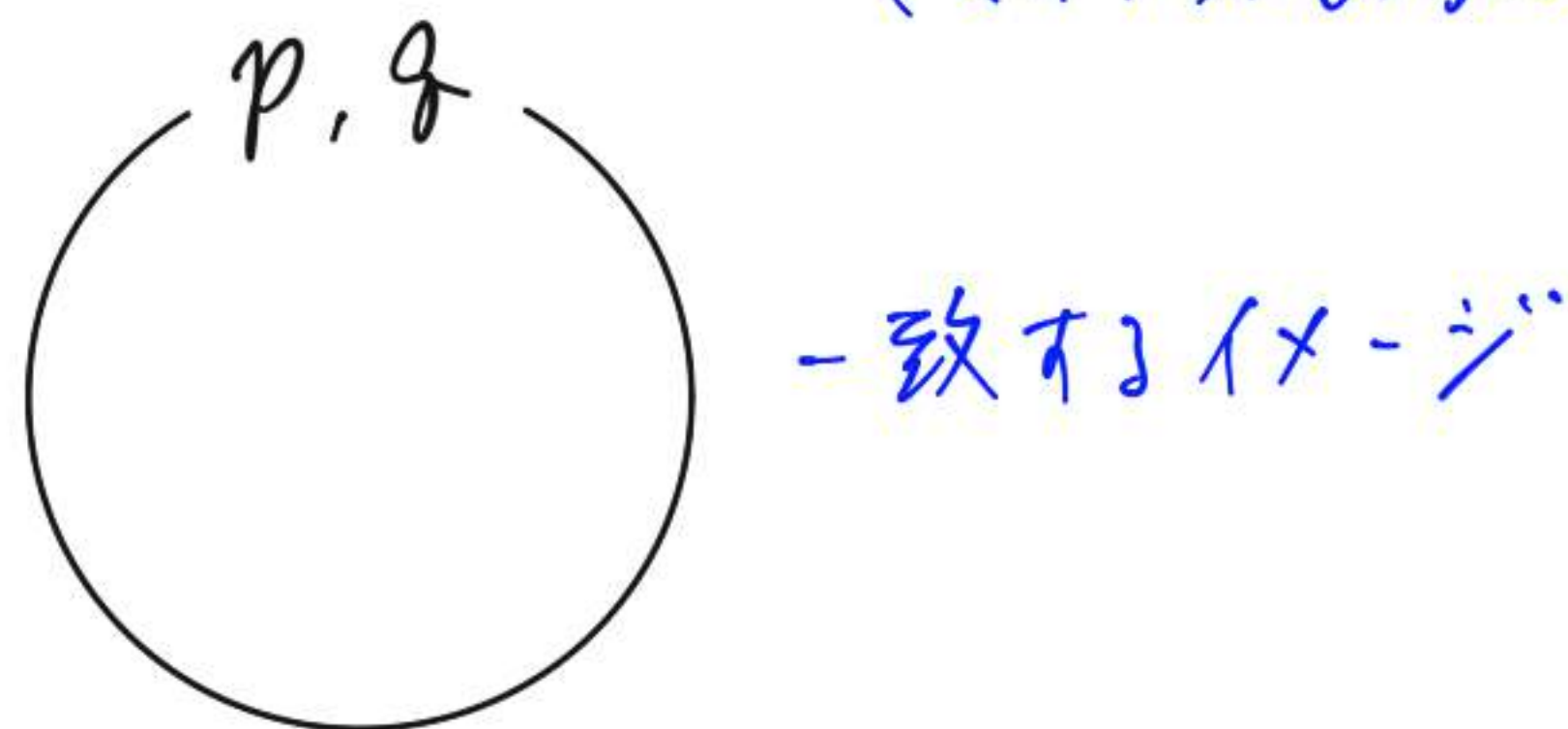
① $(p \Rightarrow q \text{ は? } \bigcirc)$ ← 直感でわかる。
 $(q \Rightarrow p \text{ は? } \textcircled{X})$ ← 直感でわかる。



② p だったら絶対に(十分) q である。
でも逆に、 q であるために p であることが必要というわけではない。
→ p は q であるための十分条件 //

$$(3) \quad p: a > b \\ q: a^3 > b^3$$

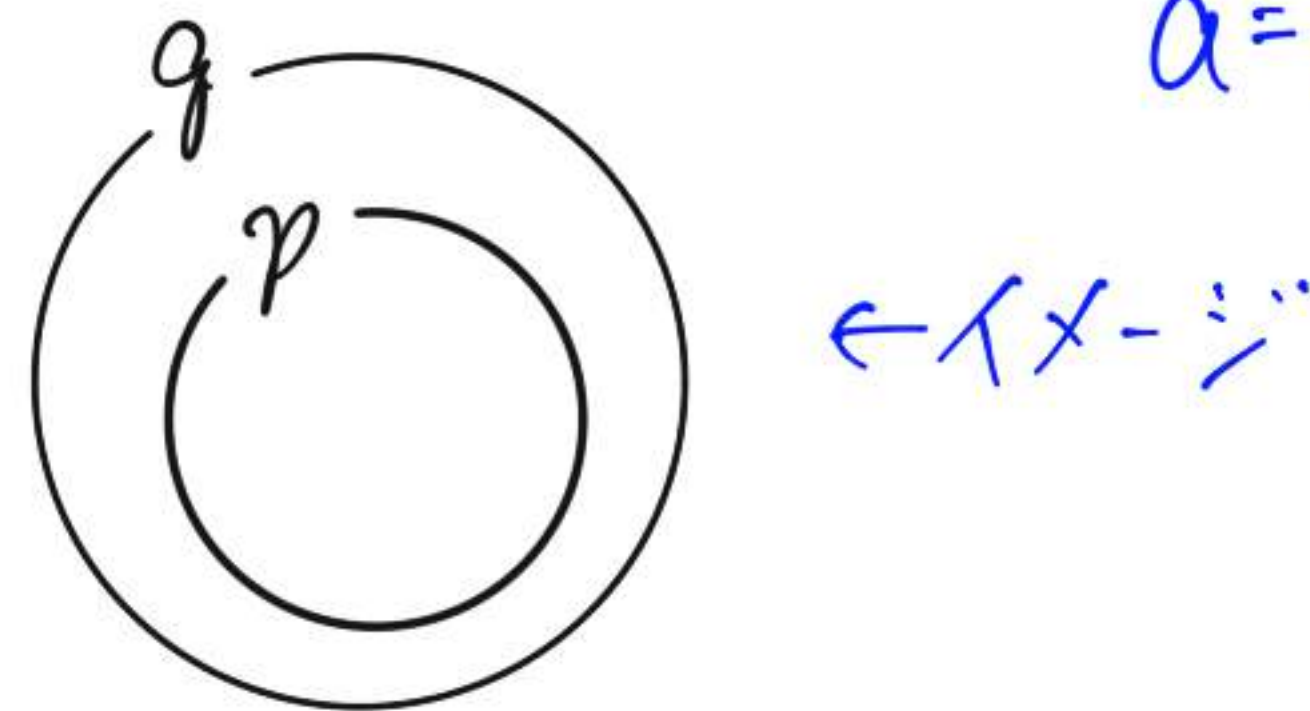
$$\textcircled{1} \begin{cases} p \Rightarrow q \text{ は? } \bigcirc \\ q \Rightarrow p \text{ は? } \bigcirc \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{少し考えれば} \\ \leftarrow \text{直感でわかる。} \\ \text{(マイナスも考えるように)} \end{array}$$



② p だったら絶対に(十分) q である。また、 q であるために p であることが必要。
 $\rightarrow p$ は q が成立するための必要十分条件

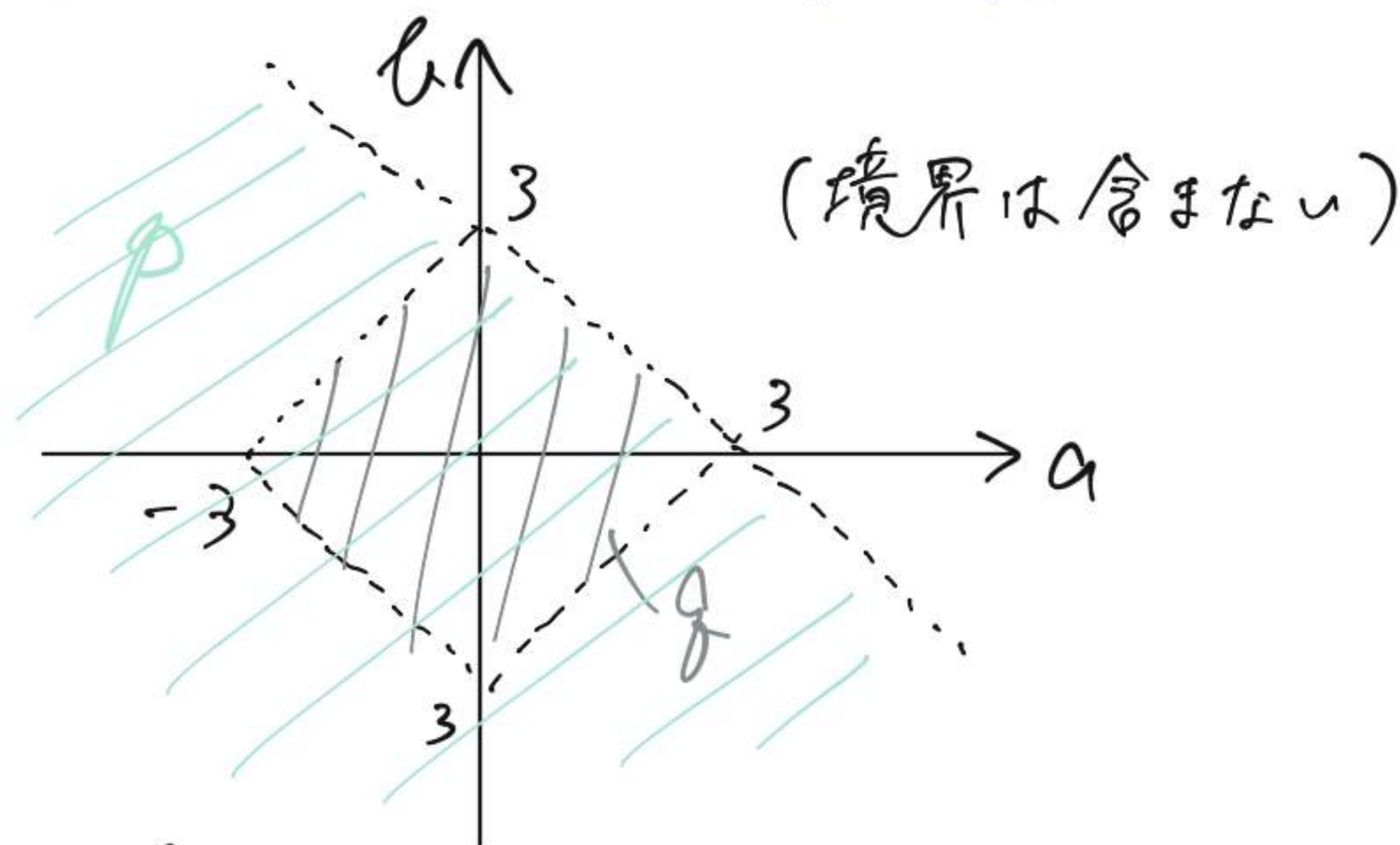
$$(4) \quad p: a, b \text{ が有理数} \\ q: a+b, ab \text{ が有理数}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} p \Rightarrow q \text{ は? } \bigcirc \\ q \Rightarrow p \text{ は? } \bigotimes \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{直感でわかる} \\ \leftarrow \text{反例がある!} \\ a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2} \end{array}$$



② p だったら絶対に(十分) q である。でも逆に、 q であるために p であることが必要というわけではない。
 $\rightarrow p$ は q であるための十分条件

- (5) $p: a+b < 3$
 $q: |a|+|b| < 3$
- $(a>0, b>0 \text{ として})$
 全ての象限に
 折り返せば書ける!
- グラフを書けるときは書いて考える。



- ① $(p \Rightarrow q \text{ は? } \times)$
 $(q \Rightarrow p \text{ は? } \circ)$
- ② p だからといって絶対に q が成立するとは限らない。でも、 q が成立するには p が必要で、 p は q が成立するための必要条件。

探求 $(a^3 > b^3 \Leftrightarrow a^3 - b^3 > 0)$
 $(a > b \Leftrightarrow a - b > 0)$ と考える。

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

a について平方完成

$$\text{ここで、} a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

(等号は $a=b=0$ のとき) ≥ 0 ≥ 0

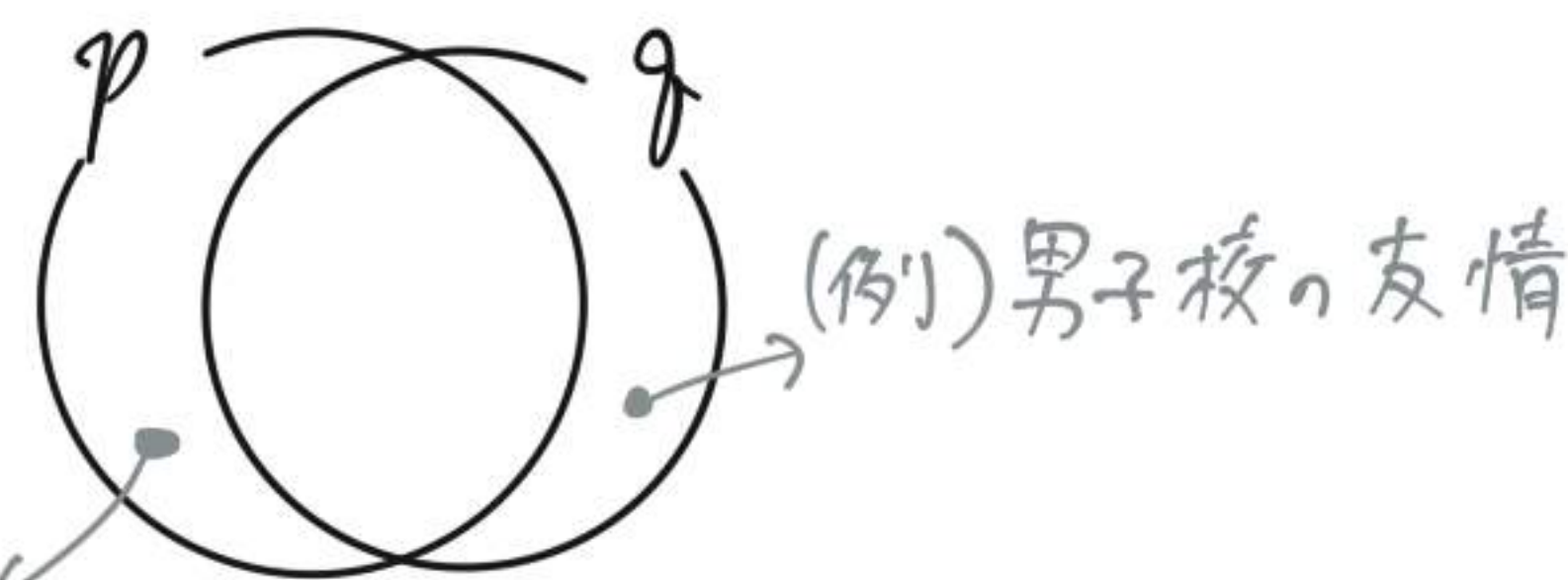
(※ $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ も同様にして示せる)

であるから、 $a^3 - b^3$ と $a - b$ の正負は必ず一致する。

自由研究

個人的見解

(例) 大変な彼氏/彼女



→ 必要条件でも十分条件でもない。

高校数学良問演習 9/100 論理と集合②

以下の、ある生徒の解答の問題点を指摘せよ。

【問題】 $\sqrt{2x^2 - 7} = x + 1$ を解け。

【解答】 両辺を2乗してルートを消す。

$$2x^2 - 7 = (x + 1)^2$$

$$2x^2 - 7 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x + 2)(x - 4) = 0$$

よって解は $x = -2, 4$

ポイント

数学の 答えは、問題に対する

必要十分条件 にならないとダメ。

→ 必要条件かつ十分条件
→ このとき、2つの条件は「同値」という。

(例) $x^2 > 4$ を解け。

→ 答え: $x > 100$

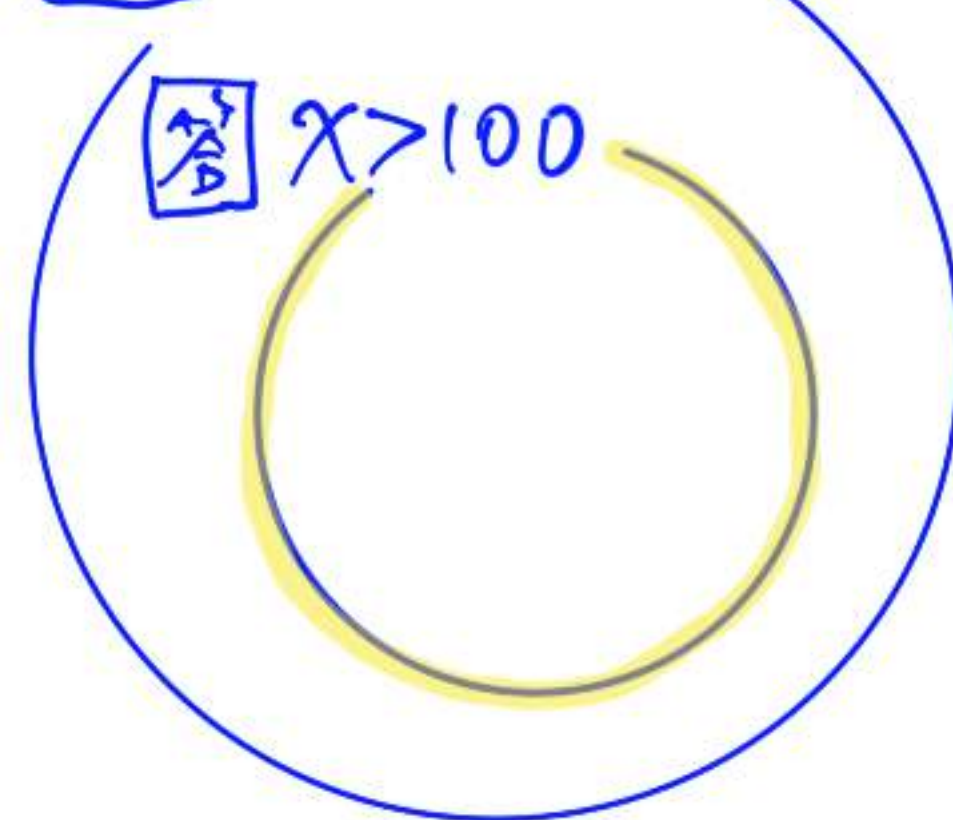
なぜなら、 x が 100 より大きければ、

$x^2 > 4$ は成り立つから。

→ この答えは、 $x^2 > 4$ のための十分条件
であるが、必要条件ではないので X

問 $x^2 > 4$

答 $x > 100$



イメージ

(例2) $x^2 = 100$ を解け。

→ 答え: x は実数
なぜなら、 $x^2 = 100$ を解くと
 x は実数になるから。

→ この答えは、 $x^2 = 100$ が成立するための
必要条件であるが、十分条件で
ないので X

答 x は実数

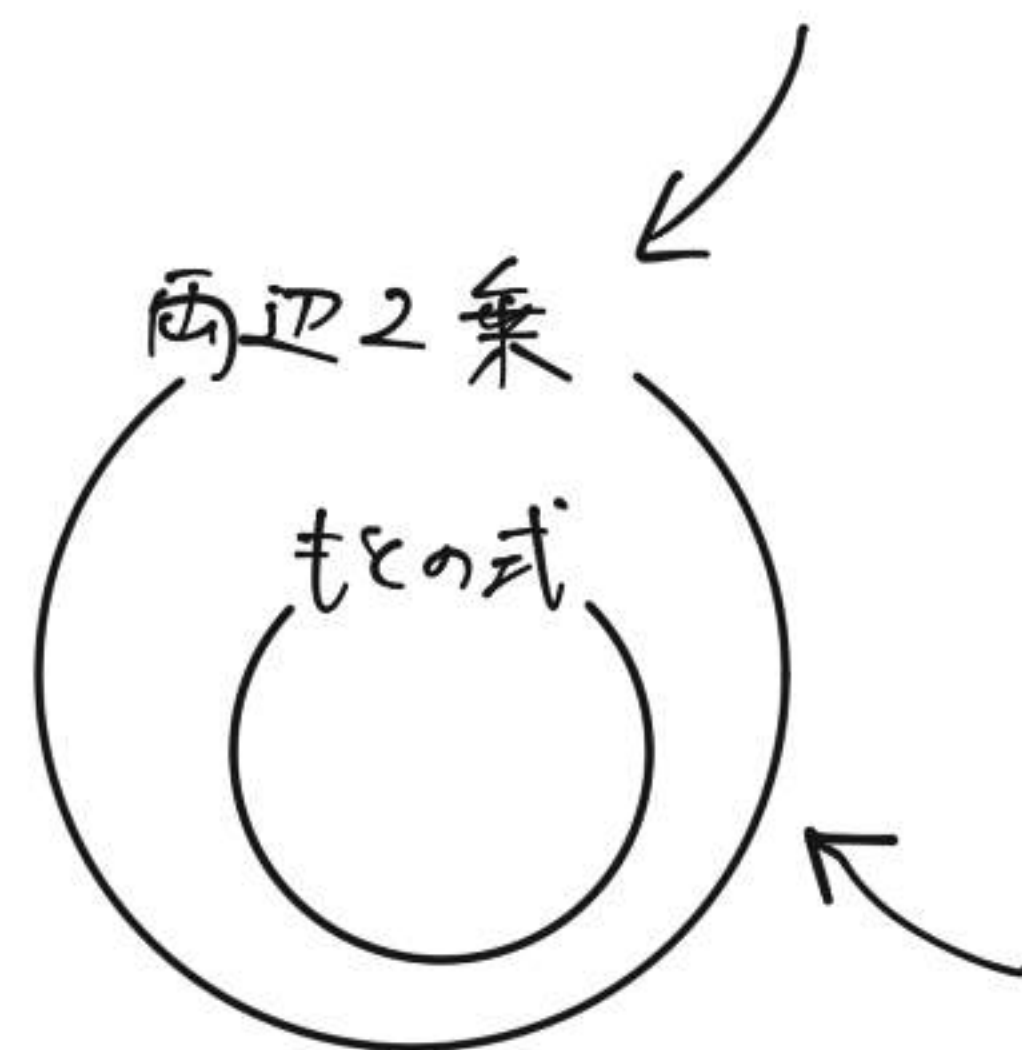
問 $x^2 = 100$

イメージ

解説

両辺 2 乗した式が成立する

→ もとの式が成立するための
必要条件 にすぎない
(一般的に)



例

$p: x = 3$ (もとの式)
 $q: x^2 = 9$ (両辺 2 乗)

$p \Rightarrow q$ は正しい (真) が、
 $q \Rightarrow p$ は間違い (偽) !

※ 反例は $x = -3$

→ 2 乗した式の解が、もとの式の解
(q が成立) (p が成立)

とは限らない!

→ もとの式の解になるかを確かめる必要。
↳ 十分条件になるか

では、 $\begin{cases} p: x=3 \\ q: x^2=9 \end{cases}$ かつ $x>0$ は？

このとき、 $p \Rightarrow q$ も $q \Rightarrow p$ も成り立つ。

$x>0$ があるので真

$\rightarrow q$ (2乗した式が成立) は p (もとの式が成立) であるための必要十分条件となり。

q は p の **同値変形** となる。($\Leftrightarrow$ で表す)

$\rightarrow$ ようなわけで、 q を解けば、 p を解くことになるので、もとの式 (p) の解であることも 確かめる必要はない。!!

十分性も確認
//

- ★ $\begin{cases} \textcircled{1} \text{ 必要条件を解いて、もとの式に代入} \\ \textcircled{2} \text{ 同値変形を行って解く。} \end{cases}$ ($\Leftrightarrow$)

解答

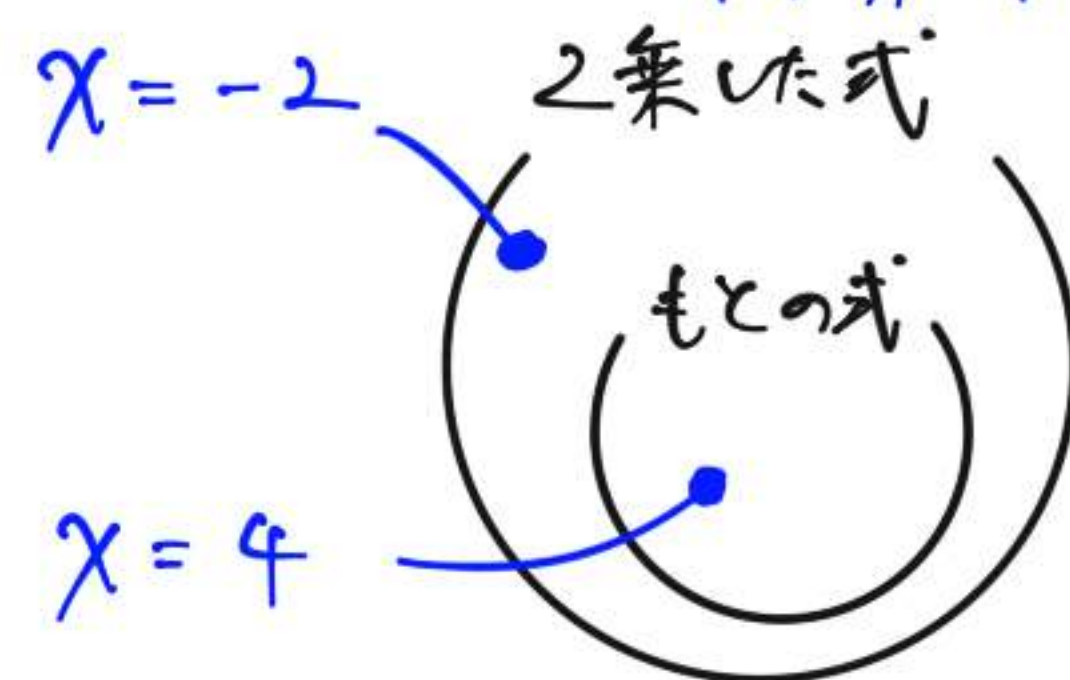
両辺を2乗した式の解を答えとしていっているので、問題に対する必要条件しか考えていない点が誤り。

ではどう修正するか? $\rightarrow$ 2通り

① 両辺を2乗した式の解 $x=-2, 4$ をもとの式 $\sqrt{2x^2-7} = x+1$ に代入すると。

$x=-2$ は不成立, $x=4$ は成立。

$\rightarrow$ 十分条件ではなかった $\rightarrow$ 十分条件でもある



よって答えは $x=4$ //

$\Rightarrow$ これでやると、解答が問題に対する必要十分条件になる。!!

② 同値変形を行う。

$$\sqrt{2x^2-7} = x+1 \quad \rightarrow \sqrt{\text{は0以上!!}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-7 = (x+1)^2 & \text{かつ} \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-4) = 0 & \leftarrow \text{式変形のみ} \\ x \geq -1 & \text{かつ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x=4} \quad \leftarrow \text{これで終了. 問題に対する必要十分な解となる!}$$

学校の授業や問題集ではあまり扱われないんですけどよね～...

頭の中がこんがらがると

思いいますが、バシッとカッコいい

数学の答案が書けるためには、

避けて通れないテーマなので、

考えぬいてめっちゃいい!

— ふぉとこはってん
@b.battenn



高校数学良問演習 10/100 論理と集合③

以下の、ある生徒の解答の問題点を指摘せよ。

【問題】連立方程式 $y = x - 1 \cdots \textcircled{1}$ 、 $x^2 + y^2 = 1 \cdots \textcircled{2}$ を解け。

【解答】①を②に代入して、

$$\begin{aligned}x^2 + (x - 1)^2 &= 1 \\2x^2 - 2x &= 0 \\x(x - 1) &= 0\end{aligned}$$

よって $x = 0$ もしくは $x = 1$

これを②に代入し、 $y^2 = 1$ つまり $y = \pm 1$ 、もしくは $y^2 = 0$ つまり $y = 0$

以上より、解は $(x, y) = (0, 1), (0, -1), (1, 0)$

ポイント

数学の 答えは、問題に対する

必要十分条件 にならないとダメ。

→ 必要条件 かつ 十分条件
→ このとき、2つの条件は「同値」という。

解説

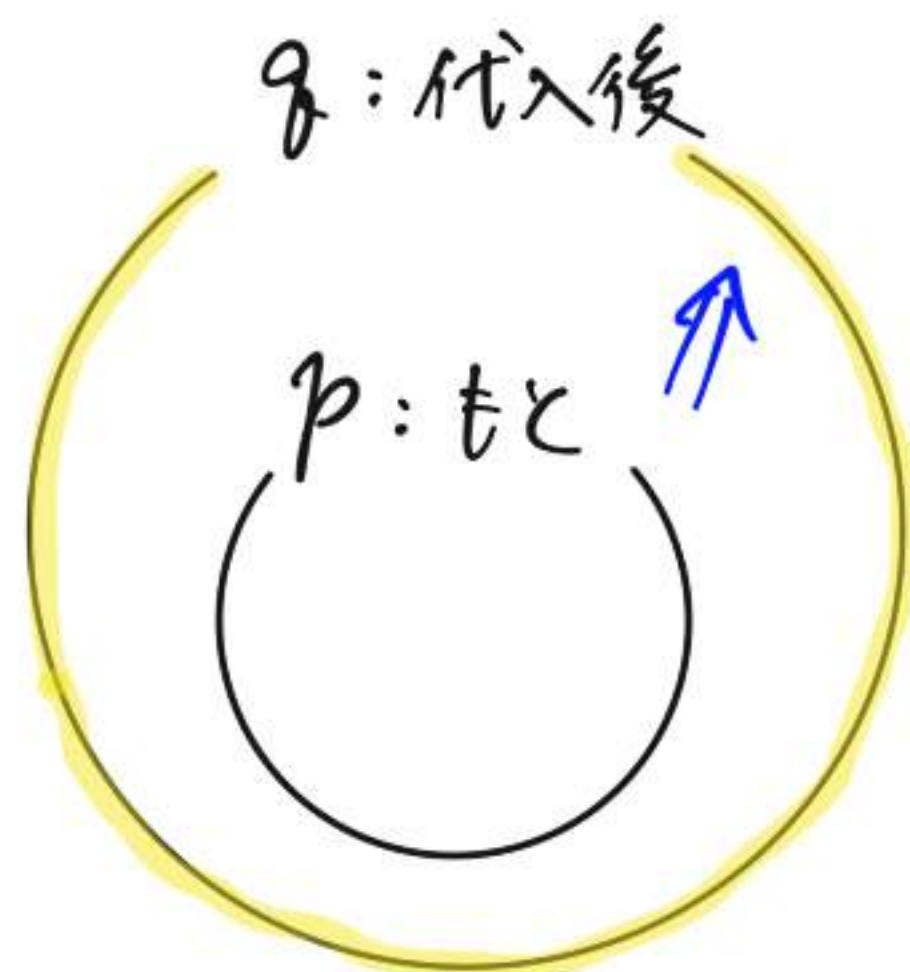
連立方程式で 代入法 を用いた式は、必要条件 でしかない。

例) $p: \begin{cases} y = x - 1 \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 3y = 2 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

$q: 2x + 3(x - 1) = 2 \leftarrow \begin{matrix} \textcircled{1} \text{を}\textcircled{2} \text{に} \\ \text{代入して} \\ \text{できた式} \end{matrix}$

$\begin{cases} p \Rightarrow q : \text{OK} \\ q \Rightarrow p : \text{間違っている} \end{cases}$

※反例 $\rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$



→ 代入後の式を解いた解が、 p (もとの式) も満たすかを確認!

→ 必要十分条件 になる!

同値変形で解くには？

$$\begin{cases} y = x - 1 & \dots ① \\ 2x + 3y = 2 & \dots ② \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3(x - 1) = 2 & \dots ③ \text{ (①を②に代入)} \\ \text{① 又は ②} & \text{かつ} \end{cases}$$

→ どちらかを残せば同値になる

つまり、

$$① \text{ かつ } ② \Leftrightarrow \text{③ かつ } \text{① 又は ②}$$

→ これを解けば OK.

この例では、

$$\begin{cases} 5x = 5 & \dots ③ \\ y = x - 1 & \dots ① \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \underline{(1, 0)}$$

★今回の問題では何が起きているのか？
(必要条件を解いて、十分性も確かめているように見える...)

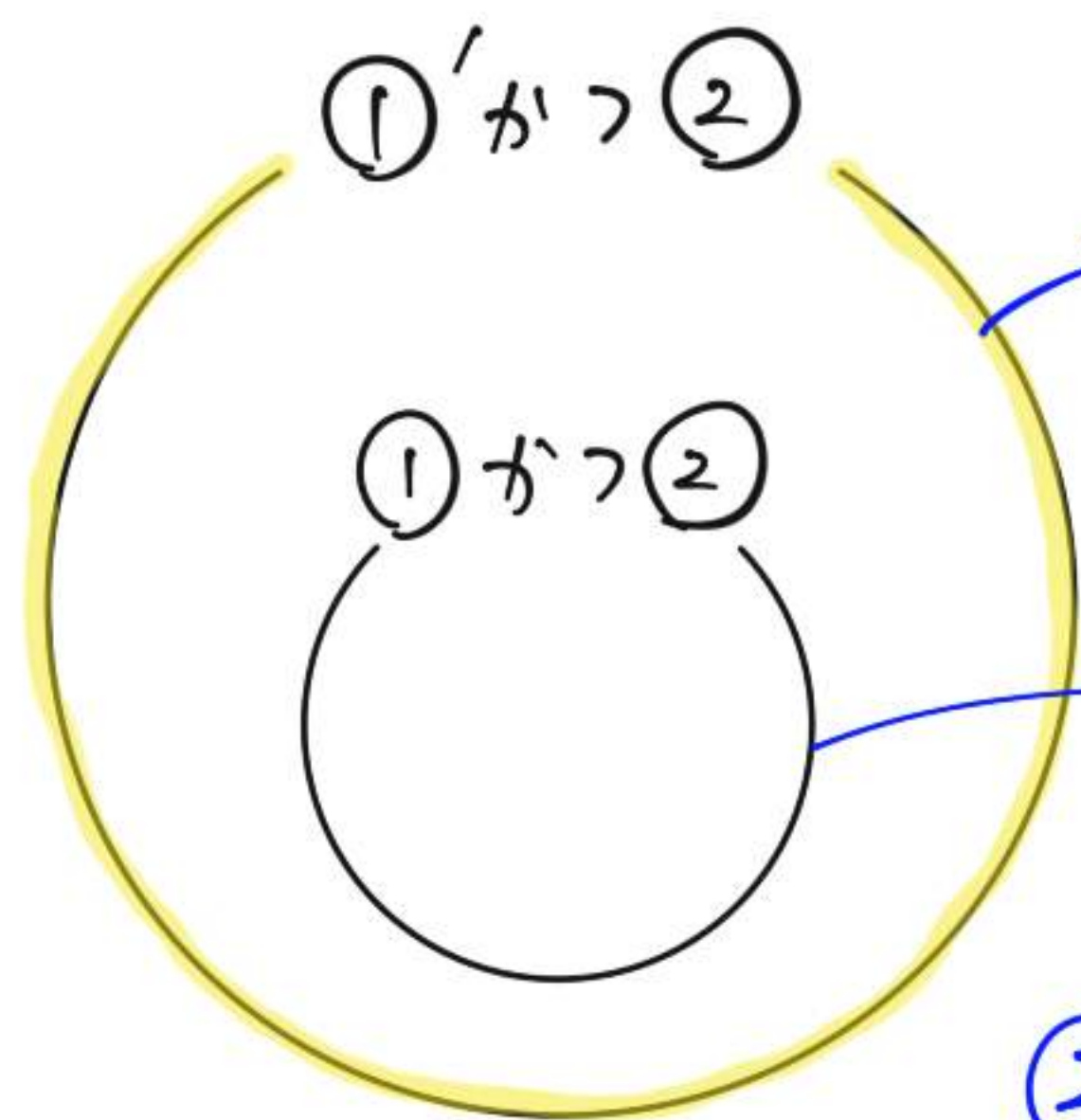
$$\begin{cases} y = x - 1 & \dots ① \\ x^2 + y^2 = 1 & \dots ② \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = (x - 1)^2 & \dots ①' \\ x^2 + y^2 = 1 & \dots ② \end{cases}$$

答案では、

①'を②に代入したものを解いて (必要条件)
②に代入して解を出している (十分性の確認)

→ (①'かつ②) の必要十分条件となる
解は出ている。

→ でも実は (①かつ②) と (①'かつ②) が
同値変形ではない!! → 9/100 参照
(両辺2乗の同値性)



答案では.
この解を求めていた.

↓でも

これらの解を
求める必要があった.

②は満たしているのて.

①に代入して確認

①'かつ②の解

$(x, y) = (0, 1)(0, -1)(1, 0)$ のうち.

①を満たすのは.

$(x, y) = (0, -1)(1, 0)$ の2つのみ //

*同値変形で解くと.(N/しややこしい)

→ 9/100 参照

$$\begin{cases} y = x - 1 \dots ① \\ x^2 + y^2 = 1 \dots ② \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = (x-1)^2 \text{ かつ } y \text{ と } x-1 \text{ の符号が一致} \dots ③ \\ x^2 + y^2 = 1 \dots ② \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = (x-1)^2 \dots ③' \\ y \text{ と } x-1 \text{ の符号が一致} \dots ③'' \\ x^2 + y^2 = 1 \dots ② \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = (x-1)^2 \dots ③' \\ y \text{ と } x-1 \text{ の符号が一致} \dots ③'' \\ x^2 + (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0, 1 \dots ②' \end{cases}$$

↑ ③'を代入した

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \dots ① \text{ に戻す } (③' \text{ かつ } ③'' \Leftrightarrow ③ \Leftrightarrow ①) \\ x = 0, 1 \dots ②' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (0, -1)(1, 0) \quad \text{②'を①に代入 かつ ②'}$$

代入 (②'→①)