名古屋大学 2021 理系第3問 / 文系第3問 ※文系は (2) まで

1 から 12 までの数字が右の図のように並べて書かれている。以下のルール (a), (b) と (終了条件) を用いたゲームを行う。ゲームを開始すると、最初に (a) を行い、(終了条件) が満たされるまで (b) の操作を繰り返す。ただし、(a) と (b) における数字を選ぶ操作はすべて独立な試行とする。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12				

(a) 1 から 12 までの数字のどれか 1 つを等しい確率で選び、右の図において選んだ数字を丸で囲み、その上に石を置く。

(b) 石が置かれた位置の水平右側または垂直下側の位置にある数字のどれか 1 つを等しい確率で選び、その数字を丸で囲み、そこに石を移して置く。例えば、石が 6 の位置に置かれているときは、その水平右側または垂直下側の位置にある数字 7, 8, 9, 10, 12 のどれか 1 つの数字を等しい確率で選び、その数字を丸で囲み、そこに石を移して置く。

(終了条件) 5, 9, 11, 12 の数字のどれか 1 つが丸で囲まれ石が置かれている。ゲーム終了時に数字 j が丸で囲まれている確率を p_j とする。以下の問いに答えよ。

(1) 確率 p_2 を求めよ。

(2) 確率 p_5 と p_{11} を求めよ。

(3) 確率 p_5, p_9, p_{11}, p_{12} のうち最も大きいものの値を求めよ。

☆ ゲームのような問題
→ 具体的に手を動かして、とにかく設定を全て理解することから!!
ここを間違うと全てパー
※ ここに関しては前回の初見動画が参考になると思います。

(1) P_2 : ゲーム終了時に2に丸が付いている確率

||

2を通る確率

2の後は何でもいい

→ 2に到達する方法を考える。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12				

2を通るのは、

① 1からスタート → 2
(a) (b)

② 2からスタート
(a)

の2つのパターン。

よって

$$P_2 = \underbrace{\frac{1}{12} \times \frac{1}{7}}_{①} + \frac{1}{12} = \frac{2}{21}$$

1〜12から1

2, 3, 4, 5, 6, 10, 12から2を選ぶ

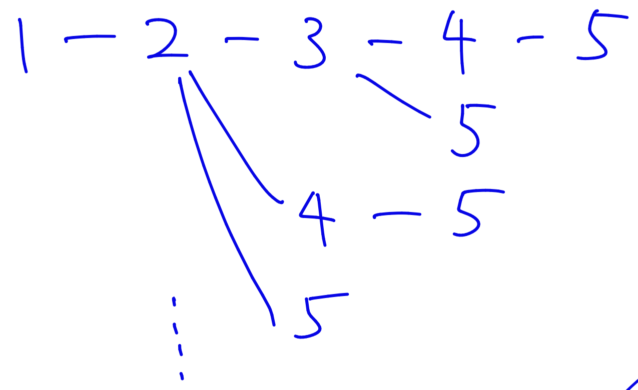
1〜12から2

(2) P_5 について、

P_2 と同じように樹形図を書いて5を通る確率を計算してもOK。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12				

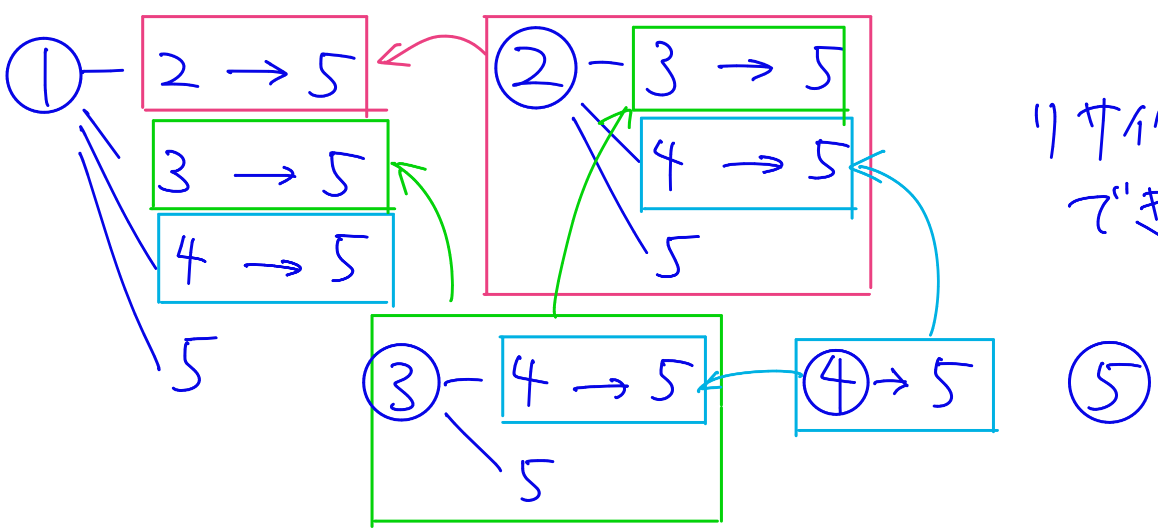
ただ結構数があることに気付く.



この試行錯誤が全て.

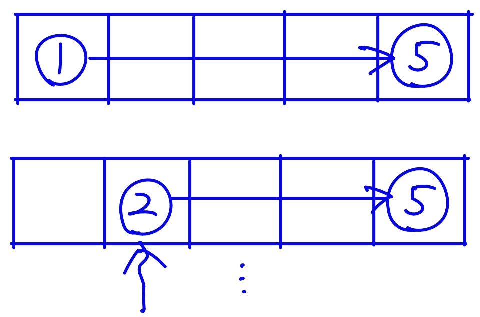
何か整理してラクできないか?
場合分けをして漸化式のように処理

例えば最初の位置で場合分け?



リサイクルできそう.

いや、5の直前の位置で場合分けすると
p_j が使える.



$p_1 \times \frac{1}{7}$

$p_2 \times \frac{1}{5}$

ここに丸がある確率は p_2 で求めてる!

回答はここから.

これらも同じように求める

$$p_5 = \underbrace{p_1 \times \frac{1}{7}}_{\text{1から5へ}} + \underbrace{p_2 \times \frac{1}{5}}_{\text{2から5へ}} + \underbrace{p_3 \times \frac{1}{3}}_{\text{3から5へ}} + \underbrace{p_4 \times \frac{1}{2}}_{\text{4から5へ}} + \frac{1}{12}$$

いきなり5

ここで,

$$p_3 = \underbrace{p_1 \times \frac{1}{7}}_{\text{1から3へ}} + \underbrace{p_2 \times \frac{1}{5}}_{\text{2から3へ}} + \underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{いきなり3}}$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{1}{7} + \frac{2}{21} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{12} = \frac{4}{35}$$

$$p_4 = p_1 \times \frac{1}{7} + p_2 \times \frac{1}{5} + p_3 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{1}{7} + \frac{2}{21} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{35} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$= \underline{\frac{16}{105}}$$ なので、

$$p_5 = \frac{1}{12} \times \frac{1}{7} + \frac{2}{21} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{35} \times \frac{1}{3} + \frac{16}{105} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$$

$$= \underline{\frac{8}{35}}$$ となる。

p_{11} について、

直前の位置は 2, 7, 10 の 3つ

$$p_{11} = \underbrace{p_2 \times \frac{1}{5}}_{\text{2から11へ}} + \underbrace{p_7 \times \frac{1}{3}}_{\text{7から11へ}} + \underbrace{p_{10} \times \frac{1}{2}}_{\text{10から11へ}} + \underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{いきなり11}}$$

ここで、

$$p_7 = p_2 \times \frac{1}{5} + \underbrace{p_6}_{p_1 \times \frac{1}{7} + \frac{1}{12}} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{2}{21} \times \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{12}\right) \times \frac{1}{5} + \frac{1}{12}$$

$$= \underline{\frac{17}{140}}$$

$$p_{10} = p_1 \times \frac{1}{7} + p_6 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{1}{7} + \frac{2}{21} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{12}$$

$$= \underline{\frac{4}{35}}$$ より、

$$p_{11} = \frac{2}{21} \times \frac{1}{5} + \frac{17}{140} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{35} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$$

$$= \underline{\frac{1}{5}}$$

(3) p_5, p_9, p_{11}, p_{12} → 何の4つ？

$p_5 = \frac{8}{35}$, $p_{11} = \frac{1}{5}$

終了条件

必ずどこかで終わるので足すと1

p_9, p_{12} も (2) と同じように求められる.

→ どっちを求める？ p_{12} の方が楽そう.

(全てわかってる)

$$p_{12} = \underbrace{p_1 \times \frac{1}{7}}_{1\text{から}12\text{へ}} + \underbrace{p_6 \times \frac{1}{5}}_{6\text{から}12\text{へ}} + \underbrace{p_{10} \times \frac{1}{2}}_{10\text{から}12\text{へ}} + \underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{いきなり}}$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{1}{7} + \frac{2}{21} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{35} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{6}{35}$$

ここで, $p_5 + p_9 + p_{11} + p_{12} = 1$ より,

$p_9 = 1 - \frac{8}{35} - \frac{1}{5} - \frac{6}{35} = \frac{2}{5}$ となり,

p_5, p_{11}, p_{12} より大きいので,

求めるものは $p_9 = \frac{2}{5}$