◎ 2次関数の最大最小（頻出！）

- ・範囲が動く（良問①）
- ・軸が動く（良問②）
- ・上下の凸が変わる（良問③） など

→ グラフを書こうとして、必要に応じて場合分け（漏れのないように！）

◎ 2変数関数の最大最小（これも頻出！）

- ・一文字固定
- ・一文字消去
- ・逆像法

今回やる

など。

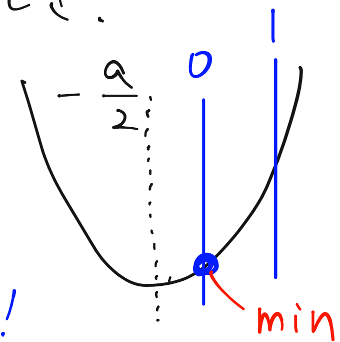
→ 問題により使い分けていく。

(1) $f(x) = x^2 + ax + b$

$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$ となるので、

軸 $x = -\frac{a}{2}$ の位置により場合分けする。

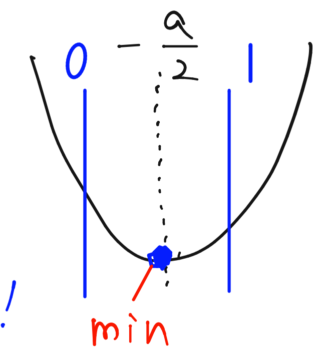
(i) $-\frac{a}{2} < 0 \iff a > 0$ のとき、



$m = f(0) = b$

↑ 一般形に代入するのがラク！

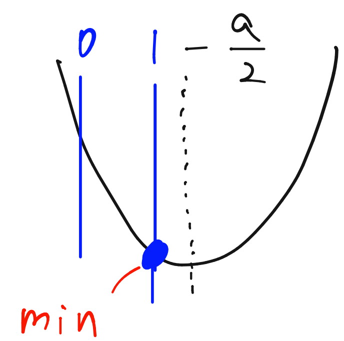
(ii) $0 \leqq -\frac{a}{2} \leqq 1 \iff -2 \leqq a \leqq 0$ のとき



$m = f\left(-\frac{a}{2}\right) = b - \frac{a^2}{4}$

↑ 標準形に代入するのがラク！

(iii) $1 < -\frac{a}{2} \iff a < -2$ のとき、



$m = f(1) = 1 + a + b$

↑ 一般形に代入するのがラク！

以上(i)〜(iii)より、

$$m = \begin{cases} b & (a>0 \text{ のとき}) \\ -\dfrac{a^2}{4}+b & (-2 \leqq a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ a+b+1 & (a<-2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots ☆$$

(2) 考え方① 1文字消去

等式条件のある2変数関数の最大最小は1文字消去が有効。
応用して、不等式でもいけることも。

$a+2b \leqq 2$

$\Longleftrightarrow \quad b \leqq -\dfrac{1}{2}a+1$

ここで、☆より、bが大きいほどmは大きくなるので、mの最大値を考えるためには

$b=-\dfrac{1}{2}a+1$ で考えてよい。

☆ わざわざ $-\dfrac{a}{2}+1$ より小さい値を選ぶ必要がない。
→ 等式条件となり、1文字消去でいける。

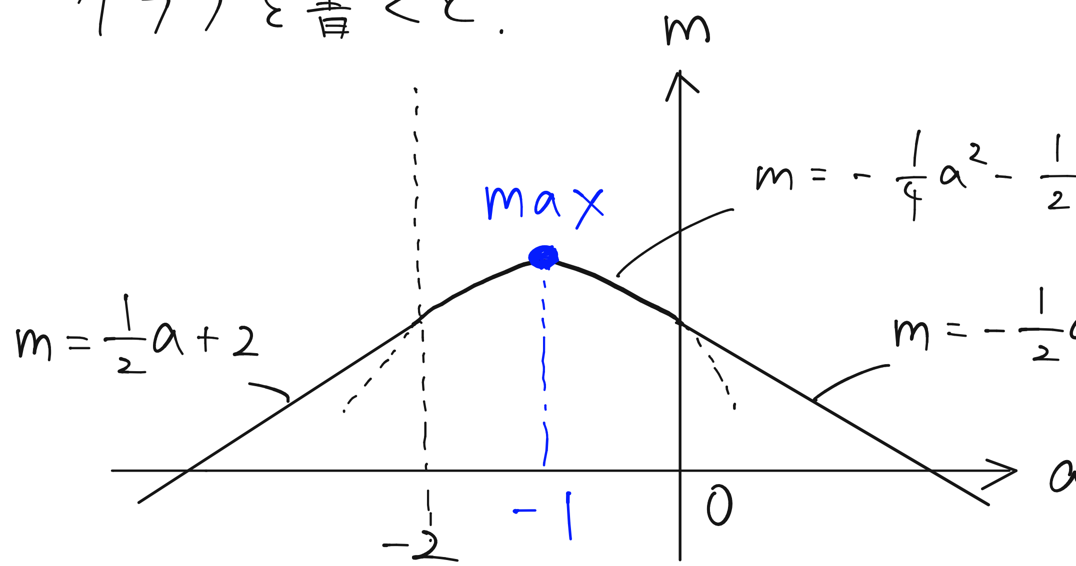
このもとで、bを消去して、 ← aよりラク!!

$$m = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}a+1 & (a>0 \text{ のとき}) \\ -\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{2}a+1 & (-2 \leqq a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}a+2 & (a<-2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$-\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{2}a+1 = -\dfrac{1}{4}(a+1)^2+\dfrac{5}{4}$ より、

グラフを書くと、



となるので、mを最大にするのは

$(a, b) = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$ のときで、

そのとき $m=\dfrac{5}{4}$ となる。

考え方② 逆像法 ← 良問 58, 59

$(a, b) \to m$ という対応関係。

m を固定して、a, b が存在する条件を求める。

↳ 式のままいくより、グラフで図形的に考えた方がいいことも。(良問 63)

$m = M$ と、ある値 M を考える。このとき、

「☆を満たす、ある (a, b) が、領域 $a + 2b \leqq 2$ 内に存在する」…① ための M の必要十分条件を求める。→ これが m のとり得る値の範囲となる。

これをグラフで考えると、

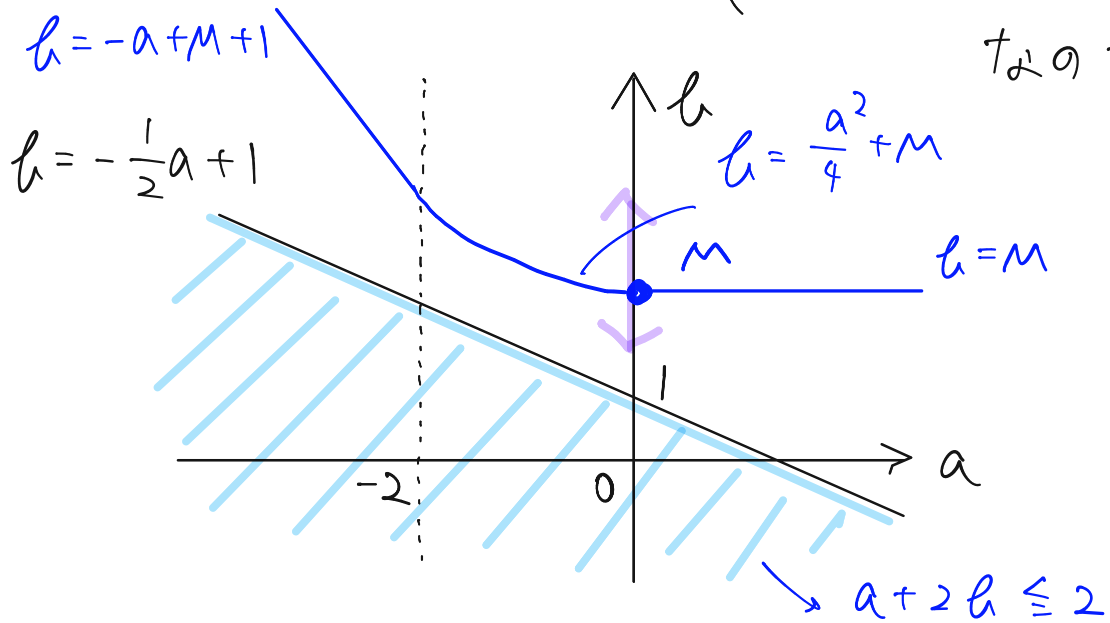
① ⇔ 「ab 平面上の ☆ のグラフが領域 $a + 2b \leqq 2$ と共有点を持つ」…②

となるので、図示すると、

$$M = \begin{cases} b & (a > 0 \text{ のとき}) \\ -\dfrac{a^2}{4} + b & (-2 \leqq a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ a + b + 1 & (a < -2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \begin{cases} M & (a > 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{a^2}{4} + M & (-2 \leqq a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ -a + M - 1 & (a < -2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので、



この青のグラフと、水色の領域が共有点を持つための M の条件を考えたい。グラフより、まん中の放物線が接するときが M が最大ぽい。それ以下の M は全てとり得る。

$b=\frac{a^2}{4}+m$ と $b=-\frac{1}{2}a+1$ が接する m を求める。

$$\frac{a^2}{4}+m=-\frac{1}{2}a+1$$

$$\Leftrightarrow\ a^2+2a+4m-4=0\ \cdots③$$

が重解を持つ条件は、

$$\frac{D}{4}=1^2-(4m-4)=0$$

$$\Leftrightarrow\ m=\frac{5}{4}$$

このとき③は $(a+1)^2=0$ となり、$a=-1$

これは確かに $-2\leqq a\leqq 0$ を満たす。→範囲内で接する。

よって、グラフより、

②が成り立つための m の必要十分条件は

$m\leqq\frac{5}{4}$ となるので、

m の最大値は $\frac{5}{4}$、このとき $(a,b)=\left(-1,\frac{3}{2}\right)$

と求められる。