数学Ⅲ特講

良問演習

積分・定積分と漸化式②　ベータ関数

実数 $p, q \geqq 0$ に対し、$I(p, q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ と定義する。

(1) $q \geqq 1$ のとき、$I(p, q)=\frac{q}{p+1}I(p+1, q-1)$ を示せ。

(2) 自然数 m, n に対して、$I(m, n)$ を求めよ。

<発展> m, n は自然数とする。

- 異なる実数 α, β について、$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ を求めよ。
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1}x\ \sin^{2n+1}x\,dx$ を求めよ。

ポイント 定積分の漸化式
(2変数 ver)

→ 部分積分が有効になることが多いので、
どっちを微分してどっちを積分するか
ゴールを見据えて見極めましょう！

(1) $I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx \quad (p \geqq 0,\ q \geqq 1)$

x^p, $(1-x)^q$ → どっちも積分可能

ゴールは $I(p+1, q-1)$
なので、x^p を積分して $(1-x)^q$ を微分。

$$= \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}(1-x)^q\right]_0^1 \to 0!$$

$1-x$ の微分の -1 もかけている → $\displaystyle + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,dx$ …①

ここで $q \geqq 1$ より $\underline{q-1 \geqq 0}$ なので、
I が定義される！

$$① = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$ を得る。よって

$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$ が示される。

(2) $I(m,n)$ は直接求められない
→ 漸化式を用いて求めていく。
→ (1) が使える！

n は1以上なので、(1) の結果より

$$I(m,n) = \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$$ が成立。

これを繰り返し用いると、
→ どこまで繰り返す？
求められるようになるまで。

和が変わらない

$$I(m,n) = \frac{n}{m+1} I(\overbrace{m+1,\ n-1}^{m+n})$$

$$= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{m+n} I(m+n,\ 0) \quad \cdots ②$$

ラストは $I(m+n-1,\ 1) = \dfrac{1}{m+n} I(m+n,\ 0)$

これは計算できる!

ここで、

$$I(m+n,\ 0) = \int_0^1 x^{m+n} dx$$

$$= \left[\frac{1}{m+n+1} x^{m+n+1} \right]_0^1 \quad (\because m と n は自然数)$$

$$= \frac{1}{m+n+1}$$ であるので、

②より

$$I(m,n) = \frac{m!\,n!}{(m+n)!} \cdot \frac{1}{m+n+1}$$

$\dfrac{m!}{m!}$ をかけて見やすくした

$$= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$ を得る。

☆ m, n の対称式

※ベータ関数

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$ のこと。

$$= I(p-1,\ q-1)$$ っぽいけど、

実は p, q は実部が正の複素数で定義される
高校数学ではその特殊ケースのみ登場!

〈発展1〉

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx$$ について.

→ 本問の形に持っていきたい…

置換する!

☆

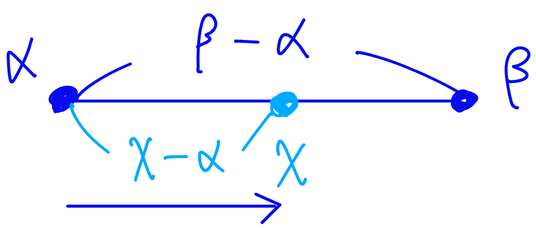
x	$\alpha \to \beta$
t	$0 \to 1$

となるような置換は?

$$t = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$ とおく。($\alpha \neq \beta$ より OK)

↑

イミは?



tは、xがどれくらいβの方に近づいているかの割合を表す.

このとき、$dt = \frac{1}{\beta-\alpha}\,dx$ であり,

x	$\alpha \to \beta$
t	$0 \to 1$

, $x-\alpha = (\beta-\alpha)t$,

$$\begin{aligned} x-\beta &= (\beta-\alpha)t + \alpha - \beta \\ &= (\beta-\alpha)(t-1) \end{aligned}$$ なので.

$$\begin{aligned} &\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx \\ &= \int_0^1 (\beta-\alpha)^{m+n+1} t^m \underline{(t-1)^n} \, dt \end{aligned}$$

惜しい!

$$= \underline{(-1)^n} (\beta-\alpha)^{m+n+1} \underline{\int_0^1 t^m (1-t)^n \, dt}$$

↳ $I(m,n)$!

$$= (-1)^n (\beta-\alpha)^{m+n+1} \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$ となる。

→ $m=1,\ n=1$ とすれば $\frac{1}{6}$ 公式が導ける!

〈発展 2〉

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1}x \sin^{2n+1}x\,dx$$

→ 本問の形に持っていきたい…

一見別物だが…

☆ $\sin^2 x = t$ とおけば、

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

であり、$\cos^2 x = 1-t$ と

なることに注目して置換。

I が使えそう。

$t = \sin^2 x$ とおく。このとき

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

,

$dt = 2\sin x \cos x\,dx$ であり、

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - t$ であるので、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1}x \sin^{2n+1}x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^m t^n \underline{dt}$$

$2\sin x \cos x\,dx$

$$= \frac{1}{2} I(n, m)$$

$$= \frac{m!\,n!}{2(m+n+1)!}$$ となる。