積分・体積①　非回転体の体積

底面の半径が 1 で高さが 1 の円柱がある。

底面の直径 AB を含み、底面と 45° の角をなす平面で、円柱を切断した。

このとき、切り取られた小さい方の立体 V の体積を以下の方法で求めよ。

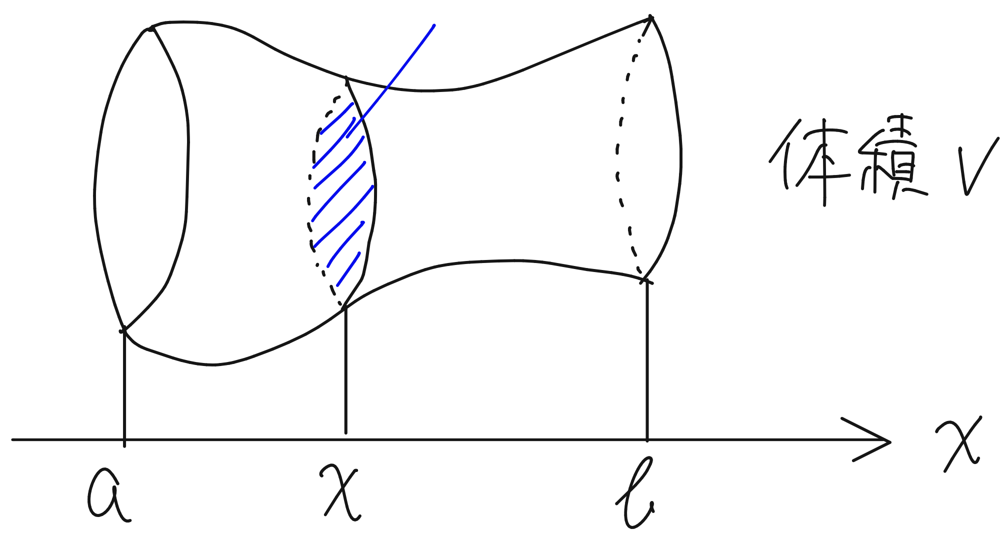
(1)　底面および AB に垂直な平面で切った断面積を考える。

(2)　底面に垂直かつ AB に平行な平面で切った断面積を考える。

<発展> 底面に平行な平面で切った断面積を考えて、体積を求めよ。

ポイント

断面積 $S(x)$



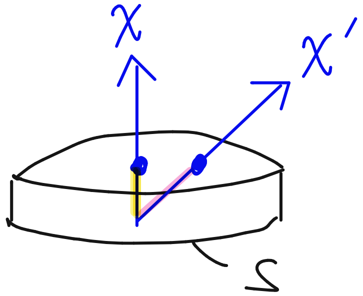
体積 V

$$V = \int_a^b \underbrace{S(x)}\, dx$$

← 面積と同じ発想.

↑ この式を求めるのがメイン
断面積(2次元)わかればOK.

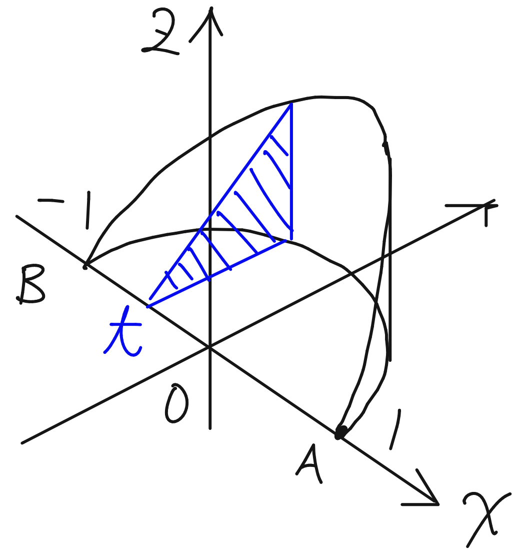
☆ 断面と軸は垂直!!
軸が斜めになると,
高さではなくなる.



☆ 積分不要のものをうまく見つけて楽をする.
円錐など

☆ 回転体の場合は, 回転軸に垂直な断面を考える! → 次回以降.
非回転体は処理がラクなものを(直線形)

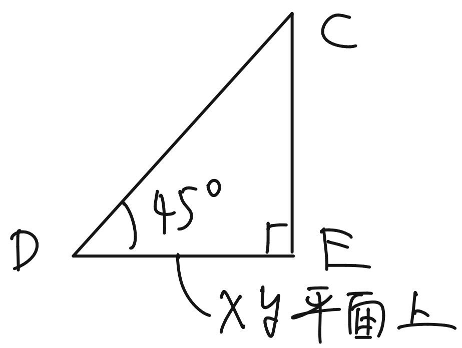
(1) まずは軸をおく.
右図のように
軸をとり,
$A(1,0,0)$,
$B(-1,0,0)$ とおく。



この立体 V の $x=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ での断面を考える。
平面を表す.

→ 2次元の話になる! 慣れるまでは
必ずグラフを書き直して頭を整理.

断面はどんな形？ → 三角形.
わかる情報を書きこむ.



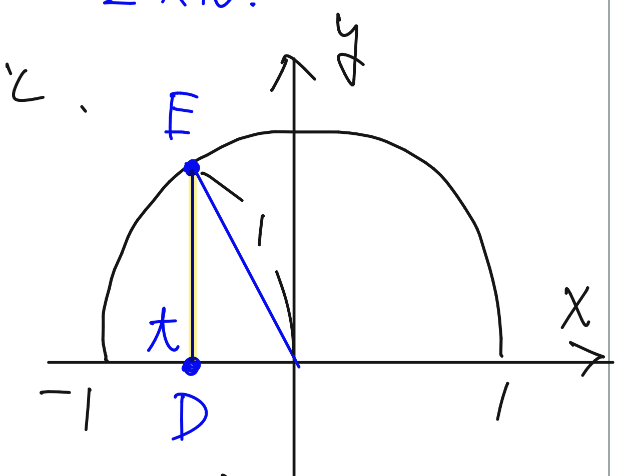
断面は 45°-45°-90° の直角三角形であり、頂点を右図のようにとる。

→ 求めやすい長さは？ DE！

→ どうやって求める？ xy平面で考えればOK

2次元！

ここで、xy平面を考えると、



$$DE = \sqrt{1-|t|^2}$$

$$= \sqrt{1-t^2} \text{ より、}$$

△CDEの面積は $\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1-t^2)$ となる。

よって V の体積は

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-t^2)\,dt = \left[\frac{t}{2}-\frac{t^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

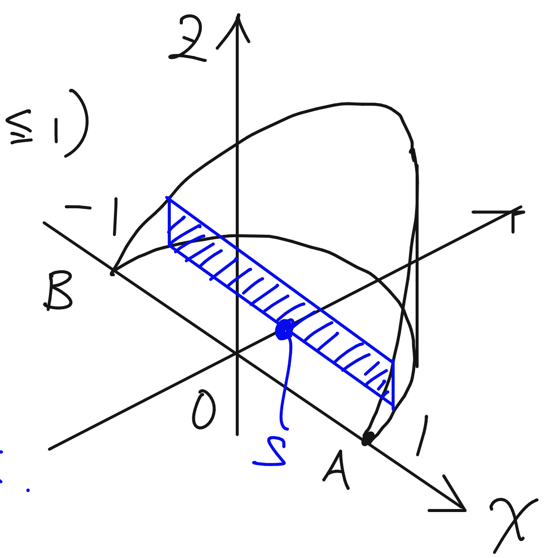
あれ、tって定数じゃないの？

→ ここでは変数化していて、$x=t$より $dx=dt$

※ $2\times\int_0^1\frac{1}{2}(1-t^2)\,dt$

$= \int_0^1(1-t^2)\,dt$ とすると処理がラク.

(2) 立体Vの $y=s$ $(0\leqq s\leqq 1)$ での断面を考える。

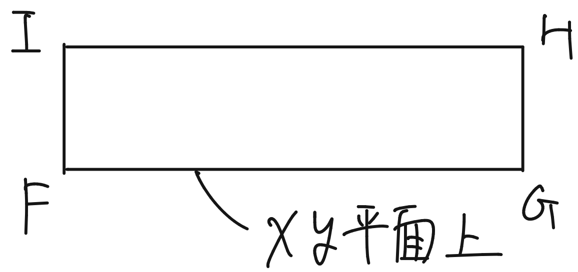


断面はどんな形？

→ 長方形！書いていく.

断面は長方形となり、
頂点を右のようにとる。

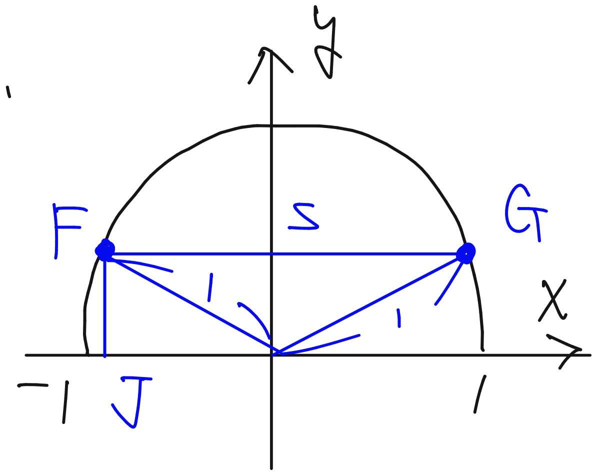
→縦と横が必要!



ここでxy平面を考えると、

$FG = 2 \times \sqrt{1-s^2}$

また、Fからx軸に下ろした垂線の足をJとすると



題意より $IF = FJ$ ← 45°の切断より

ここで $FJ = s$ より、$IF = s$ を得る。

よって長方形の面積は

$FG \times IF = 2s\sqrt{1-s^2}$ となる。

Vの体積は

$$\int_0^1 2s\sqrt{1-s^2}\,ds = \left[-\frac{2}{3}(1-s^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

↓
合成関数の積分

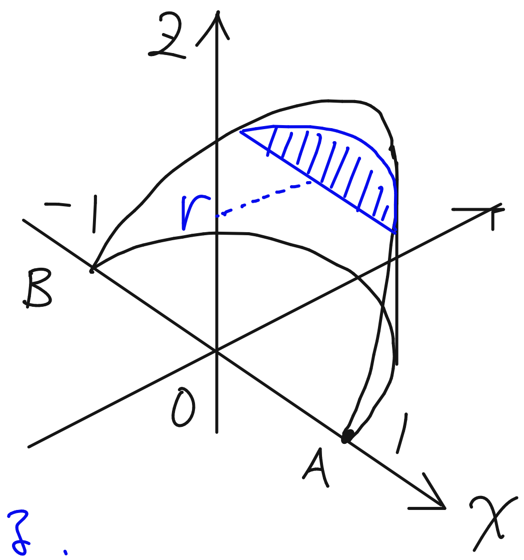
$$= \frac{2}{3}$$

$\boxed{\text{おまけ}}$

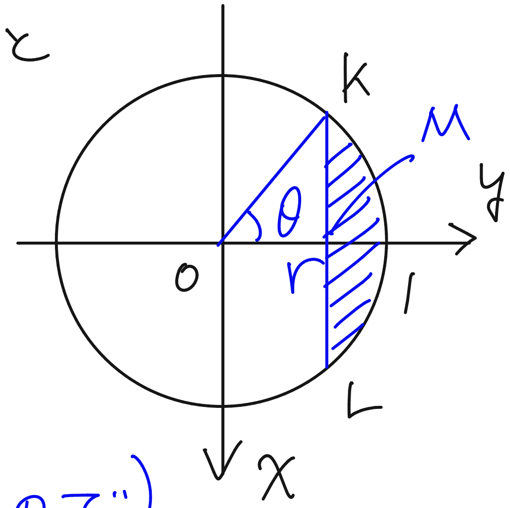
☆(1)(2)のように、直線で囲まれた断面を考えると、処理しやすいことが圧倒的に多い。
おまけは発展的。

立体Vの $z=r$ $(0 \leqq r \leqq 1)$ での断面を考える。

円と直線で囲まれた謎の図形が生まれる。



断面をxy平面に投影すると
右図のようになり、
θや各点をこのようにおく。
($0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ に留意)



→ 断面積をθで表す
(すぐにrでは表せないので)

このとき断面積 $S(\theta)$ は

$$\pi \cdot 1^2 \times \frac{2\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin 2\theta = \theta - \sin\theta\cos\theta$$

である。

積分はrでやりたいので、
どっちかに合わせるために
関係式を作る。

$$\int_0^1 \underline{S(\theta)}\,\underline{dr}$$

いま、△OMKに着目すると、

$\cos\theta = r$ が成り立つ。→ drをdθで表す方がラク。

よって求める体積は

r	$0 \to 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \to 0$

(グラフより)

$$\int_0^1 S(\theta)\,dr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\theta - \sin\theta\cos\theta)\cdot(-\sin\theta\,d\theta)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{\theta\sin\theta}_{\text{部分積分}} - \underbrace{\sin^2\theta\cos\theta}_{\text{合成関数の積分}})\,d\theta$$

$$= \Big[-\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta}_{=1} - \Big[\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \underline{\frac{2}{3}}$$