

北海道大学 2022 文系第1問

k を実数の定数とし、 $f(x) = x^3 - (2k - 1)x^2 + (k^2 - k + 1)x - k + 1$ とする。

- (1) $f(k - 1)$ の値を求めよ。
- (2) $|k| < 2$ のとき、不等式 $f(x) \geq 0$ を解け。

動画や公式を検索しやすいアプリ okke



3次方程式、3次不等式

→ 式で考える場合、直接考えるのは
難しいので、因数分解を扱う

1次×2次になり、
考えやすい！

(困難は分割せよ)

→ (1)の結果はゼロかな？と予想。

$$(1) f(k-1) = \underbrace{(k-1)^3}_{-k} - \underbrace{(2k-1)(k-1)^2}_{(k^2-k+1)(k-1)} - \underbrace{k+1}_{-(k-1)}$$

なるべく展開を避けて、
処理をうくに！まとめまくる

↓
-(k-1)

$$= (k-1)^2 \left(\underbrace{k-1-(2k-1)}_{-k} \right) + \underbrace{k(k-1)^2}_{(k^2-k+1-1)(k-1)} \\ = k(k-1)(k-1) \text{ より}$$

$$= -k(k-1)^2 + k(k-1)^2$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

(2) (1)の結果を用いて、因数定理で
因数分解できる！

$f(k-1) = 0$ を踏まえて、

$$f(x) = (x - (k-1))(x^2 - kx + 1)$$

1次式の割り算は暗算で！

と表せるので、

$$f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{(x - (k-1))(x^2 - kx + 1) \geq 0} \quad \dots \textcircled{1}$$

→ それぞれの話に分けて考える.

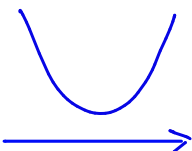
$$\begin{cases} x - (k-1) \geq 0 \\ \underline{x^2 - kx + 1 \geq 0} \end{cases} \quad \text{又は} \quad \begin{cases} x - (k-1) \leq 0 \\ \underline{x^2 - kx + 1 \leq 0} \end{cases}$$

これを考えるときに、

$x^2 - kx + 1 = 0$ を解くと

$$x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} \quad \text{となり、}$$

$|k| < 2$ より 実数解を持たない

つまり  常に正と気付く!

→ 答えは判別式でOK.

ここで、 $x^2 - kx + 1 = 0$ の判別式 $\in D$ とすると、 $|k| < 2$ のもとで

$$D = k^2 - 4 < 0$$

となるので、 $x^2 - kx + 1$ は常に正である。

$$\text{よって } \textcircled{1} \Leftrightarrow x - (k-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x \geq k-1} \quad \text{となる。}$$