名古屋大学 2023 理系第2問

$0<b<a$ とする。xy 平面において、原点を中心とする半径 r の円 C と点 $(a, 0)$ を中心とする半径 b の円 D が 2 点で交わっている。

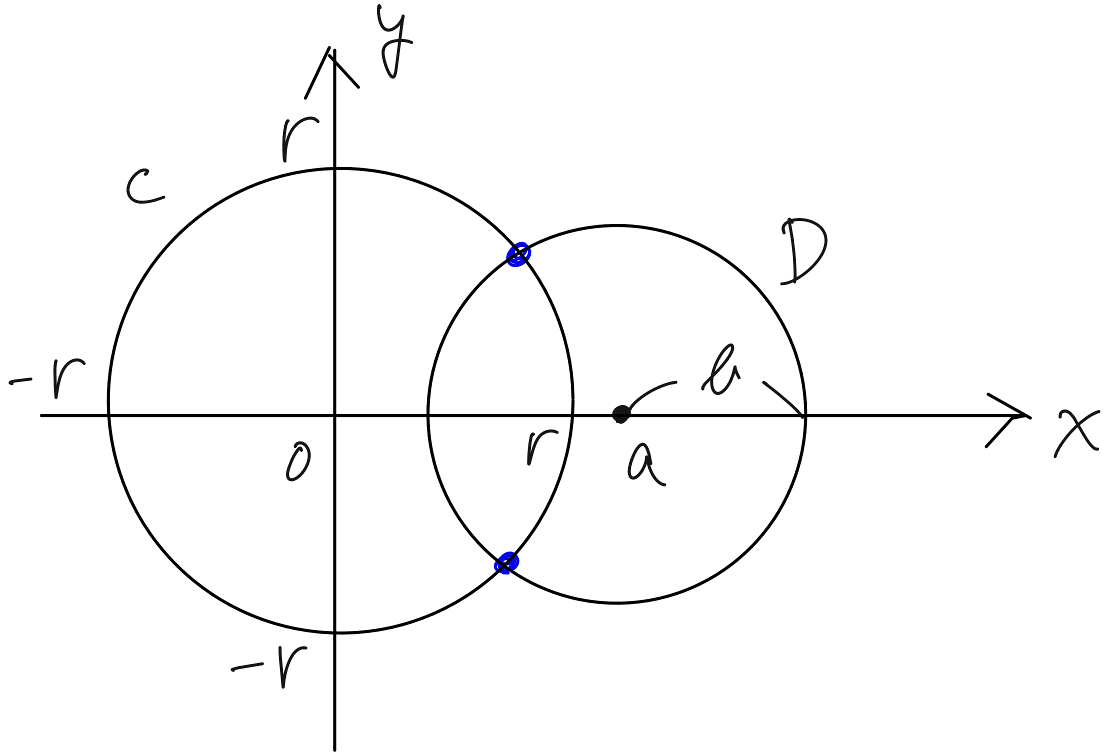
(1) 半径 r の満たすべき条件を求めよ。

(2) C と D の交点のうち y 座標が正のものを P とする。P の x 座標 $h(r)$ を求めよ。

(3) 点 $Q\,(r, 0)$ と点 $R\,(a-b, 0)$ をとる。D の内部にある C の弧 PQ、線分 QR、および線分 RP で囲まれる図形を A とする。xyz 空間において A を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 $V(r)$ を求めよ。ただし、答えに $h(r)$ を用いてもよい。

(4) $V(r)$ の最大値を与える r を求めよ。また、その r を $r(a)$ とおいたとき、$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(r(a)-a)$ を求めよ。

☆重た〜〜い計算問題ですが、方針を定める訓練にはなります。(試行錯誤して戻ってくる体力が奪われるので特に大事)

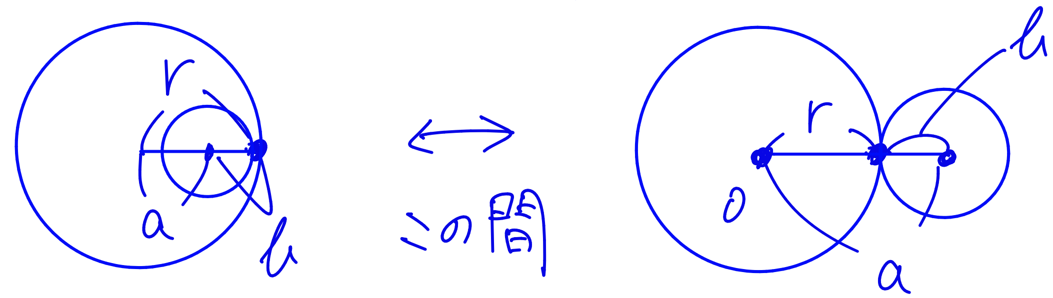


(1) 2円の位置関係 → 5つとその条件言えますか??

CとDが2点で交わるための必要十分条件は、

$|r-b| < a < r+b$ …① である。

中心間のキョリ



左側について

$-a < r-b < a$

$b-a < r < a+b$

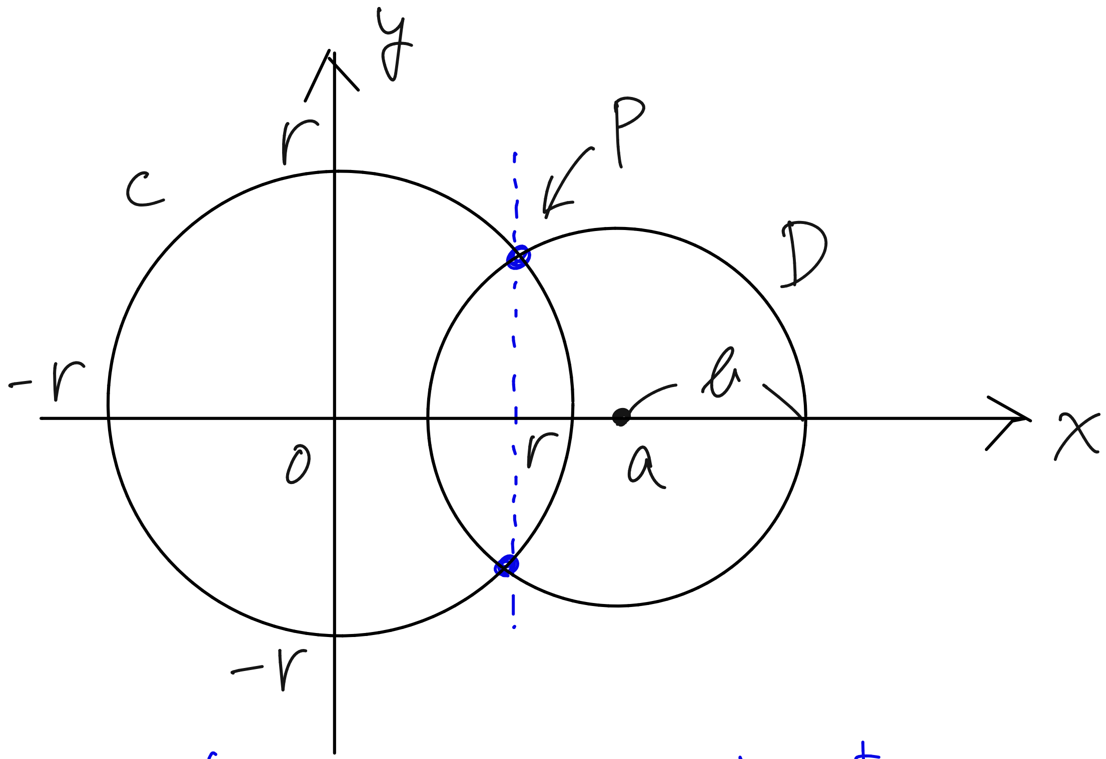
$0 < b < a$ より $b-a < 0$ であり、

$r > 0$ であるから、$0 < r < a+b$

右側について $r > a-b$ (>0)

よって ① ⟺ $a-b < r < a+b$ となる。

(2)



Pのx座標 → CとDの式を連立して
xについて解けばOK!
1つ出るはず.

CとDの式は,

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ (x-a)^2+y^2=\ell^2 \end{cases}$$

であり,

yを消去すると,

$$(x-a)^2+(r^2-x^2)=\ell^2$$

$$-2ax=-a^2+\ell^2-r^2$$

$a>0$より

$$x=\frac{a^2-\ell^2+r^2}{2a}$$

を得て,

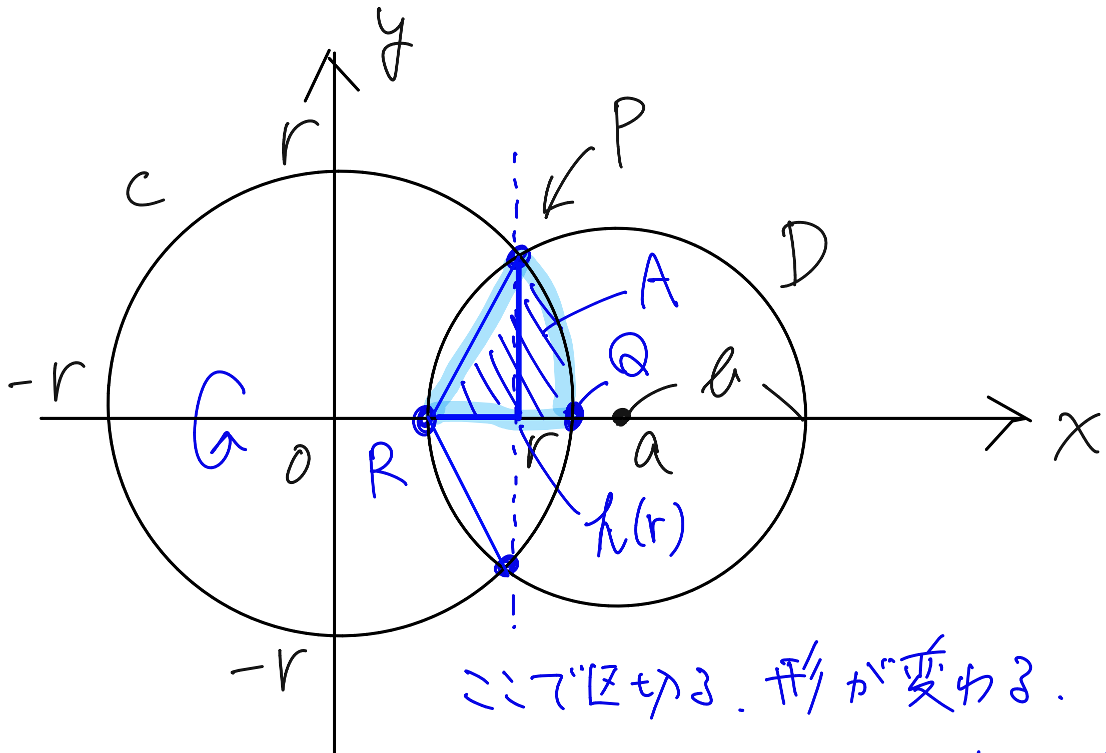
これがPのx座標となるので,

$$h(r)=\frac{a^2-\ell^2+r^2}{2a}$$

となる。

☆今回は2点で交わることが前提なので,
実数xが1つ出てくることがわかっていて,
yについては特に考えなくてもOK.
ただ,一般にはy^2を消去する際は
注意!!!(実数yが存在するかは要検討)

(3)



ここで区切る。形が変わる。

RPを回した方は、円錐なので直接計算！

$V(r) = \pi\left(r^2 - h(r)^2\right) \times \left(h(r) - (a-\ell)\right) \times \frac{1}{3}$ → RP回転

$+ \int_{h(r)}^{r} \pi \left(\underbrace{r^2 - x^2}_{y^2}\right) dx$ → 弧PQ回転

$= \frac{\pi}{3}\left(r^2 - h(r)^2\right)\left(h(r) - (a-\ell)\right) + \pi\left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{h(r)}^{r}$

$= \frac{\pi}{3}\left(r^2 - h(r)^2\right)\left(h(r) - (a-\ell)\right) + \pi\left(\frac{2}{3}r^3 - r^2 h(r) + \frac{1}{3}h(r)^3\right)$

$= \frac{\pi}{3}(a-\ell)h(r)^2 - \frac{2}{3}\pi r^2 h(r) - \frac{\pi}{3}(a-\ell)r^2 + \frac{2}{3}\pi r^3$

$h(r)$の降べき → これでもOK。

因数分解も見える

$= \frac{\pi}{3}(a-\ell)\left(h(r)+r\right)\left(h(r)-r\right) - \frac{2}{3}\pi r^2\left(h(r)-r\right)$

$= \frac{\pi}{3}\left(h(r)-r\right)\left((a-\ell)\left(h(r)+r\right) - 2r^2\right)$ となる。

※ $h(r)$を代入してもキレイにならない。

☆ 妥当性チェック!! 特徴的な値で!

$r = a-\ell$ と $r = a+\ell$ で 0になる?

(4) $V(r) = \frac{\pi}{3}(a-b)h(r)^2 - \frac{2}{3}\pi r^2 h(r)$

$\qquad - \frac{\pi}{3}(a-b)r^2 + \frac{2}{3}\pi r^3$

☆微分を見すえるとこっちが楽!
$\frac{\pi}{3}$メンドいのでまとめる.
$h(r)$もややこしいのでhに.
rの関数であることを忘れず!

$$= \frac{\pi}{3}\left(\underline{(a-b)h^2 - 2r^2h - (a-b)r^2 + 2r^3}\right)$$

ここを最大に(困難は分解せよ)

$U(r) = (a-b)h^2 - 2r^2h - (a-b)r^2 + 2r^3$
とおき,これを最大にするrを求める.

hをどこで代入するかが悩ましい.
$\frac{dh}{dr}$を考えると意外にシンプルなので,
hのまま合成関数の微分を用いる.

$\frac{dh}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{a^2-b^2+r^2}{2a}\right) = \underline{\frac{r}{a}}$ を用いると,

$$\frac{dU}{dr} = 2(a-b)h\cdot\underline{\frac{r}{a}} - 4rh - 2r^2\cdot\underline{\frac{r}{a}} - 2(a-b)r + 6r^2$$

→ rの式にしたいので,hは消す必要.
<u>まとめて代入</u>が鉄則!

$$= \left(2(a-b)\cdot\frac{r}{a} - 4r\right)\boxed{h} - \frac{2}{a}r^3 - 2(a-b)r + 6r^2$$

$$= -\cancel{2}r\cdot\frac{a+b}{a}\cdot\frac{a^2-b^2+r^2}{\cancel{2}a} - \frac{2}{a}r^3 - 2(a-b)r + 6r^2$$

→ rの3次関数なので,降べきに.

$$= -\frac{3a+b}{a^2}r^3 + 6r^2 - \left(\frac{(a+b)(a^2-b^2)}{a^2} + 2(a-b)\right)r$$

$(a+b)(a-b)$

$$= -\frac{3a+b}{a^2}r^3 + 6r^2 - \frac{(a-b)\left((a+b)^2+2a^2\right)}{a^2}r$$

$$= -\frac{r}{a^2}\left((3a+b)r^2 - 6a^2r + (a-b)(3a^2+2ab+b^2)\right)$$

→ これは $\frac{dU}{dr}$ なので、正負を知りたい!!

→ $a-b<r<a+b$ での増減わかる.

→ 因数分解を狙う

$$\begin{array}{ccccc}
3a+b & & -(3a^2+2ab+b^2) & — & -3a^2-2ab-b^2 \\
1 & \times & -(a-b) & — & -3a^2+2ab+b^2 \\
3a+b & & (a-b)(3a^2+2ab+b^2) & & -6a^2
\end{array}$$

$$= -\frac{r}{a^2}\left((3a+b)r - (3a^2+2ab+b^2)\right)\left(r-(a-b)\right)$$

→ $r = \frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$ の場所は??

→ $a-b<r<a+b$ にないと、最大値をとる r がなくなるので、この中にあると予想がつく.

あとは大小を示す.

ここで、

$$a+b - \frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b} = \frac{2ab}{3a+b} > 0$$

大予想　小予想　$(\because a, b>0)$

$$\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b} - (a-b) = \frac{4ab+2b^2}{3a+b} > 0$$

大予想　小予想　$(\because a, b>0)$

より、

$$a-b < \frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b} < a+b$$ を得るので、

$U(r)$の増減は

$a+b$

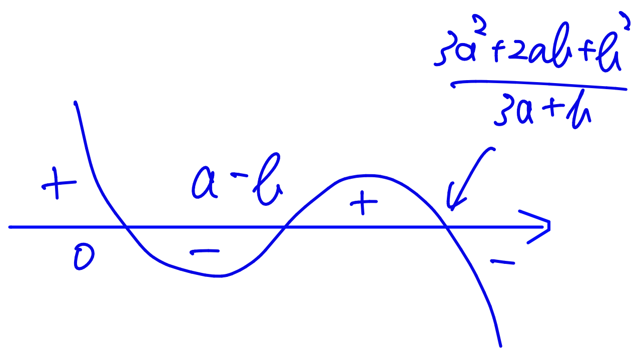
r	$\cdots$	0	$\cdots$	$a-b$	$\cdots$	$\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$	$\cdots$
$\frac{dU}{dr}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
U	↗		↘		↗		↘

となり、

$a-b<r<a+b$ での

最大値をとるrは

$$r=\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}$$ である。



これを$r(a)$とすると、

$$\lim_{a\to\infty}(r(a)-a)=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{3a^2+2ab+b^2}{3a+b}-a\right)$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{ab+b^2}{3a+b}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{b+\frac{b^2}{a}}{3+\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{b}{3}$$ と求められる。

bは定数!!