積分・体積⑥　大阪大学 2019 理系第3問

数学Ⅲ特講

過去問

実数 s, t が $s^2+t^2 \leqq 6$ を満たしながら変わるとき、xy 平面上で

点 $(s+t, st)$ が動く領域を A とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $(2, \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ。

(2) A を図示せよ。

(3) A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

ポイント　点$(s+t, st)$の動く領域
→ 良問演習1A2B 第64問目
逆像法の考え方がベースになるので
okke で辞書の確認を！

(1) 実数存在条件に気付かせる優しい誘導

$(2, \sqrt{2})$が領域Aに含まれるかは、

$$\begin{cases} s+t=2 & \cdots ① \\ st=\sqrt{2} & \cdots ② \\ s^2+t^2 \leqq 6 \end{cases}$$

を満たす実数s, tが存在するかに対応する。

①②より、(s,t)は$x^2-2x+\sqrt{2}=0$の2解であるが、 ←解と係数の関係
$D/4 = 1-\sqrt{2} < 0$より(s,t)は実数とならない。よって$(2,\sqrt{2})$は領域Aに含まれない。//

ちなみに、
$s^2+t^2=(s+t)^2-2st$
$= 4-2\sqrt{2} \leqq 6$ なので、
$s^2+t^2 \leqq 6$は満たしているので要注意。

(2) 逆像法で考える（(1)の誘導を活かす）

領域A内の点を(X, Y)とおき、

$$\begin{cases} s+t=X & \cdots ③ \\ st=Y & \cdots ④ \\ s^2+t^2 \leqq 6 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

を満たす実数s, tが存在する（… Ⓐ）ための、
(X, Y)の必要十分条件を求める。

③④より(s,t)は$x^2-Xx+Y=0$の2解なので$D=X^2-4Y \geqq 0$が必要。

また、⑤より ← 対称式なので、基本対称式を利用！

$(s+t)^2-2st \leqq 6$

③④を代入して

$X^2-2Y \leqq 6$ ← s,tを消去できた。

となるので、☆が成り立つための(X,Y)の必要十分条件は、

$$\begin{cases} X^2-4Y \geqq 0 \\ X^2-2Y \leqq 6 \end{cases}$$

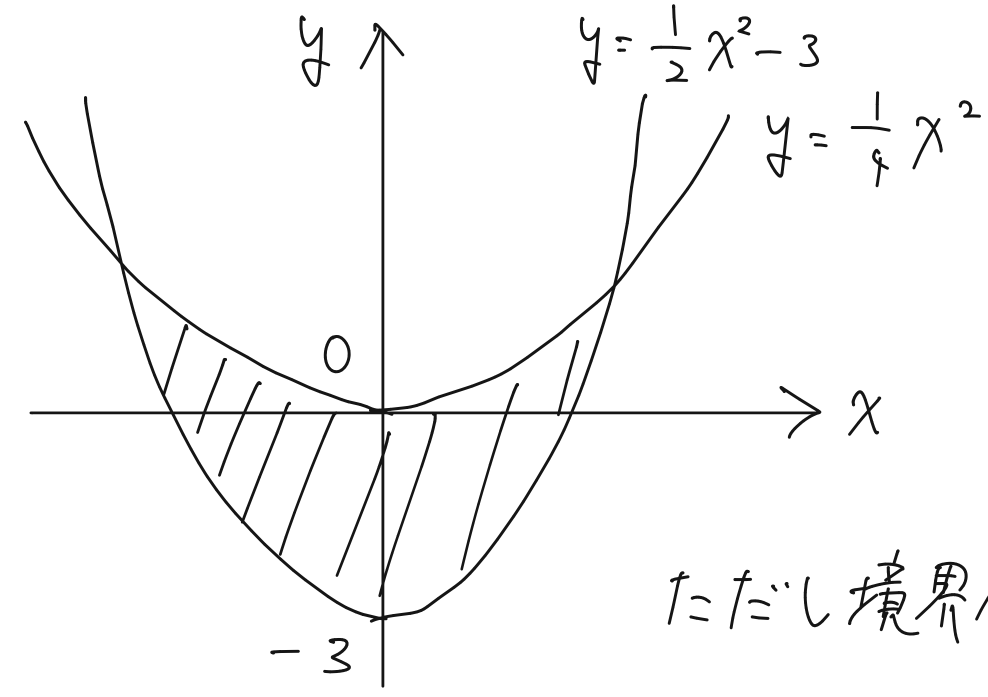
である。

(X,Y)を(x,y)に変えて変形すると、

$$\begin{cases} y \leqq \frac{1}{4}x^2 \\ y \geqq \frac{1}{2}x^2-3 \end{cases}$$

となり、これがAを表す。

図示すると、

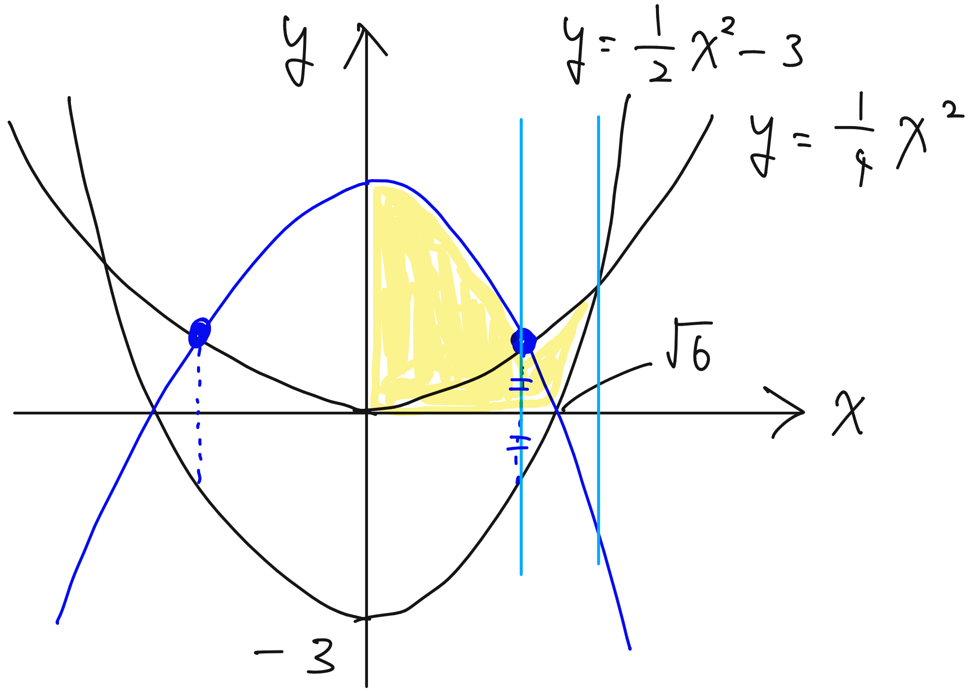


ただし境界含む。

(3) 回転体の体積 → 良問②

☆軸にまたがった図形の回転で、
場合分けが発生するようなものは、
片方に寄せて考えると考えやすい！

☆対称性に気付いてラクをする。



Aはy軸に関して対称なので、$x \geqq 0$で考える。

$y=\frac{1}{4}x^2$と、$y=\frac{1}{2}x^2-3$をx軸に対称に移した$y=-\frac{1}{2}x^2+3$ ← yを−yに
の交点のx座標は、

$$\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{2}x^2+3$$

$x=2$ $(x \geqq 0$より$)$ となる。

さらに、$y=\frac{1}{4}x^2$と$y=\frac{1}{2}x^2-3$の交点のx座標は、

$$\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}x^2-3$$

$x=2\sqrt{3}$ $(x \geqq 0$より$)$ となる。

よって$x \geqq 0$での体積は

$$\int_0^2 \pi\left(-\frac{1}{2}x^2+3\right)^2 dx + \int_2^{2\sqrt{3}} \pi\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx - \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \pi\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^2 dx \quad \cdots ⑨$$

⑥ ⑦ ⑧

ドーナツ回避

⑥ $= \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9\right) dx$

$= \pi \left[\frac{1}{20}x^5 - x^3 + 9x\right]_0^2$

$= \left(\frac{8}{5} - 8 + 18\right)\pi = \underline{\frac{58}{5}\pi}$

⑦ $= \frac{\pi}{16}\int_2^{2\sqrt{3}} x^4 dx$

$= \frac{\pi}{16}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_2^{2\sqrt{3}}$

$= \frac{\pi}{16}\left(\frac{288}{5}\sqrt{3} - \frac{32}{5}\right)$

$= \underline{\left(\frac{18}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5}\right)\pi}$

リサイクル

⑧ $= \pi\left[\frac{1}{20}x^5 - x^3 + 9x\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}$

$= \pi\left\{\left(\frac{72}{5}\sqrt{3} - 24\sqrt{3} + 18\sqrt{3}\right) - \left(\frac{9}{5}\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 9\sqrt{6}\right)\right\}$

$= \underline{\left(\frac{42}{5}\sqrt{3} - \frac{24}{5}\sqrt{6}\right)\pi}$

以上より、

⑨ $= \frac{58}{5}\pi + \left(\frac{18}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5}\right)\pi - \left(\frac{42}{5}\sqrt{3} - \frac{24}{5}\sqrt{6}\right)\pi$

$= \frac{56 - 24\sqrt{3} + 24\sqrt{6}}{5}\pi$ となるので、

求める体積は、2倍して ← $x \leqq 0$ の方も忘れずに!

$\underline{\underline{\frac{112 - 48\sqrt{3} + 48\sqrt{6}}{5}\pi}}$ となる。