数学Ⅲ特講
良問演習

積分・体積③　不等式で表された立体の体積

$y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 4,\ 1 \leqq z \leqq y^2$ を満たす立体 V を考える。

(1)　V の体積を求めよ。

(2)　V を y 軸回りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{\text{ポイント}}$ 形がわからない、不等式で与えられた立体

切る軸を決める ← なるべく断面が処理しやすくなるように！☆

(要は一文字固定する)

↓

断面を考える ← 立体がイメージできないときは平面で考える！

↓

断面積を求める

↓

体積を求める

(固定を解除する)

☆目安として、登場回数の多い文字を固定すると断面が簡単になることが多い。

→ 色々とやってみます！

((2) を見越すと y 固定したくもなる)

(1) 登場回数の多い y を固定すれば、断面がラクになりそう。

→ 他でもできる。

$\boxed{y\text{を固定}}$ ← $y=k$ としたいけど、k の範囲は？

実数 y のとりうる値の範囲は、

$y \geqq 0$ かつ $1 \leqq y^2 \leqq 4$

$\Longleftrightarrow$ $\underline{1 \leqq y \leqq 2}$ である。

これが実数 x, z が存在するための必要十分条件。なぜ？

そこで、$y=k$ $(1 \leqq k \leqq 2)$ とおくと、

→ 断面が存在！

与不等式は

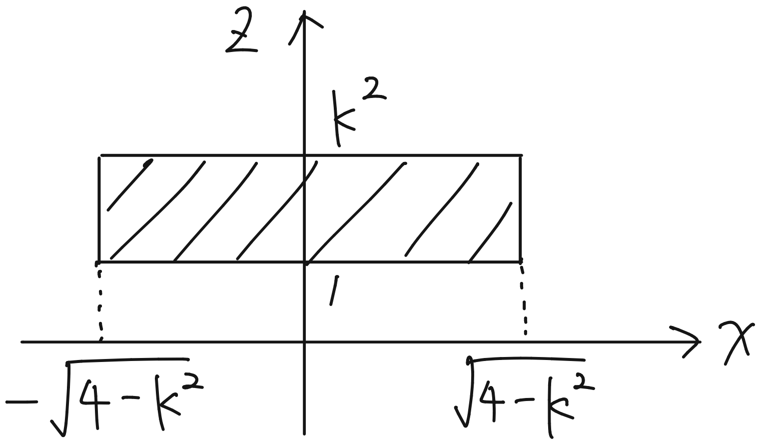
$$\begin{cases} x^2 \leqq 4-k^2 \\ 1 \leqq z \leqq k^2 \end{cases}$$

← x と z がバラけるのがありがたい！

↑ これが断面。

となる。

これを xz 平面に図示すると、 ←平面上で考える



となる。

↑断面

よって面積は $2\sqrt{4-k^2}\,(k^2-1)$ である。

↑断面積

→あとは積分。

求める体積は

$$\int_1^2 \underbrace{2\sqrt{4-k^2}}_{\sin\theta\text{ で置換}}(k^2-1)\,\underbrace{dk}_{y=k\text{ より}} \quad \cdots ①$$

となる。 あとは処理

ここで $k=2\sin\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと、

k	$1 \to 2$
θ	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{2}$

、 $dk = 2\cos\theta\, d\theta$ より、

$$① = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta \cdot (4\sin^2\theta - 1) \cdot 2\cos\theta\, d\theta$$

ルート外れた!

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\underbrace{8\sin^2 2\theta}_{2\text{倍角}} - 8\cos^2\theta\right) d\theta \quad \cdots ②$$

分割して考える。

ここで、

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 4\theta}{8}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$ より、

$$② = 8\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16}\right) - 8\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$ //

体積問題は
計算力も大事です!
合うまでやり直しを!

$\boxed{x\text{を固定}}$

実数 x の範囲は、y が $1 \leqq y \leqq 2$ なので

$$x^2 \leqq 4 - y^2 \leqq 3$$ yによる!

つまり $-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ である。

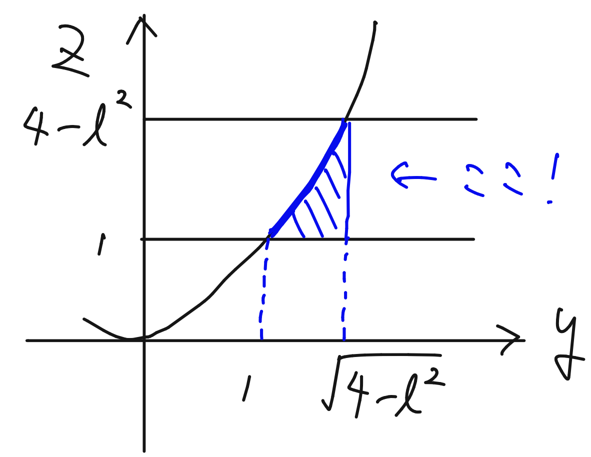
そこで $x = l$ $(-\sqrt{3} \leqq l \leqq \sqrt{3})$ とおくと、

与不等式は

$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ 1 \leqq z \leqq y^2 \leqq 4 - l^2 \end{cases}$$ となる。

さっきよりやさしい!

これを yz 平面に図示すると、



となる。

よって面積は

$$\int_1^{\sqrt{4-\ell^2}} (y^2-1)\,dy$$ ←この時点で積分が登場

$$= \left[\frac{1}{3}y^3 - y\right]_1^{\sqrt{4-\ell^2}}$$

$$= \frac{1}{3}(4-\ell^2)\sqrt{4-\ell^2} - \sqrt{4-\ell^2} + \frac{2}{3}$$

→これを $-\sqrt{3} \leqq \ell \leqq \sqrt{3}$ で積分 … どうする?

(偶関数を利用すれば少しはラク)

$$2 \times \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3}(4-\ell^2)\sqrt{4-\ell^2} - \sqrt{4-\ell^2} + \frac{2}{3}\right)d\ell$$

→ $\ell = 2\sin\theta$ で頑張るけど少ししんどい.

計算力の強化には是非!

$\boxed{z \text{ を固定}}$

実数 z の範囲は、y が $1 \leqq y \leqq 2$ なので

$1 \leqq z \leqq y^2 \leqq 4$ 　　y による!

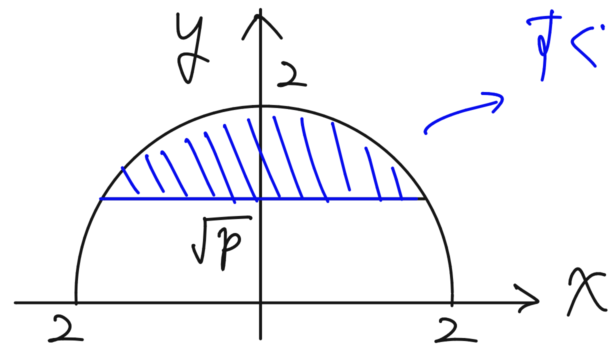
つまり $1 \leqq z \leqq 4$ である。

そこで $z = p$ $(1 \leqq p \leqq 4)$ とおくと、

与不等式は

$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ x^2+y^2 \leqq 4 \\ y^2 \geqq p \end{cases} \iff \begin{cases} y \geqq \sqrt{p} \\ x^2+y^2 \leqq 4 \end{cases}$$ となる。

これを xy 平面に図示すると



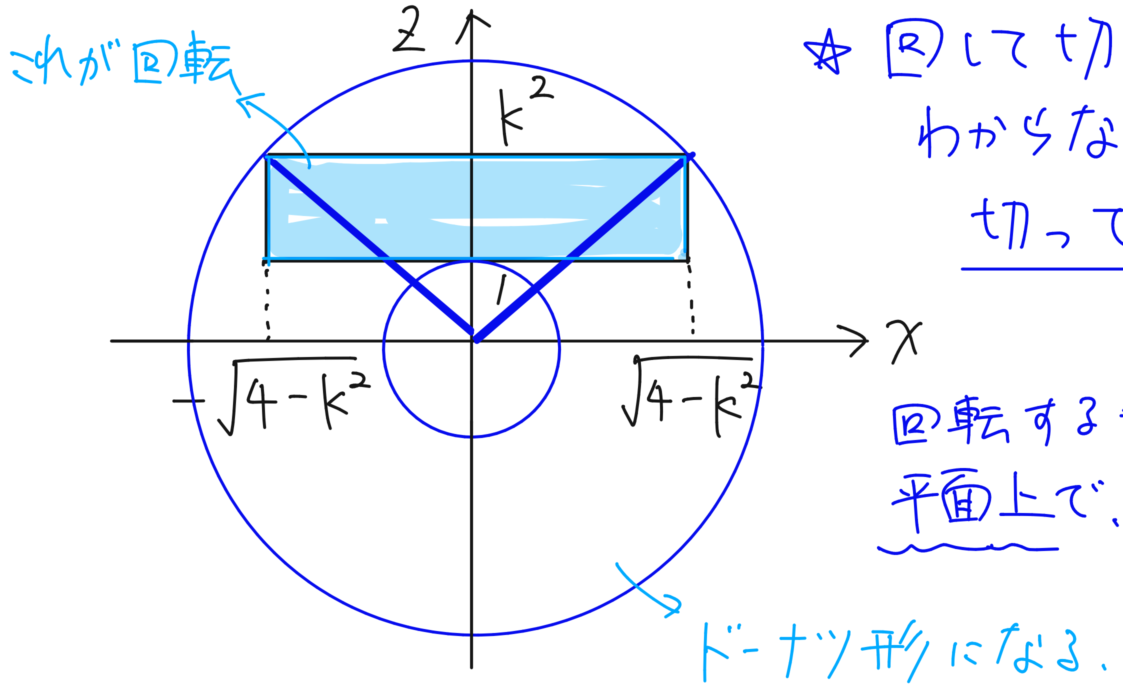
すぐに計算できない!

θ とか設定することになり、気が引ける.

(cf. 良問演習①)

(2) (1)と同様，y軸に垂直で切った断面について考える。 ← 回転体の処理は前問で。

$y=k \ (1 \leqq k \leqq 2)$ とおくと，



☆ 回して切って
わからなければ
切って回せ!

回転するものを
平面上で考える。

↑断面

断面積は，

$$\pi \cdot \Big(\underbrace{\left(\sqrt{4-k^2}\right)^2 + k^4}_{\text{大円の半径の2乗}}\Big) - \pi \cdot 1^2$$

$$= \pi\left(k^4 - k^2 + 3\right)$$ ↑ 断面積

よって求める体積は

$$\int_1^2 \pi\left(k^4 - k^2 + 3\right)\underbrace{dk}_{y=k\text{より}}$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}k^5 - \frac{1}{3}k^3 + 3k\right]_1^2$$

$$= \pi\left(\frac{32-1}{5} - \frac{8-1}{3} + 3\times(2-1)\right)$$

少し工夫，通分を1回で済ます

$$= \pi\left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3} + 3\right)$$

$$= \frac{93-35+45}{15}\pi$$

$$= \frac{103}{15}\pi$$ //