

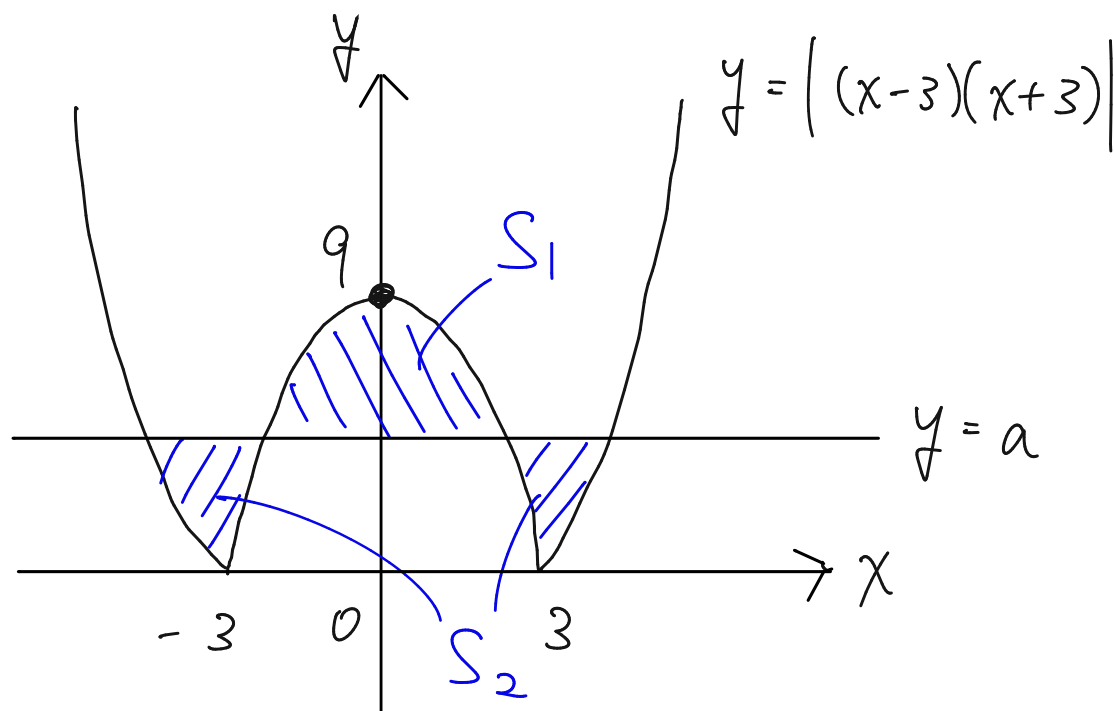
九州大学 2023 文系第1問

a を $0 < a < 9$ を満たす実数とする。 xy 平面上の曲線 C と直線 l を、次のように定める。

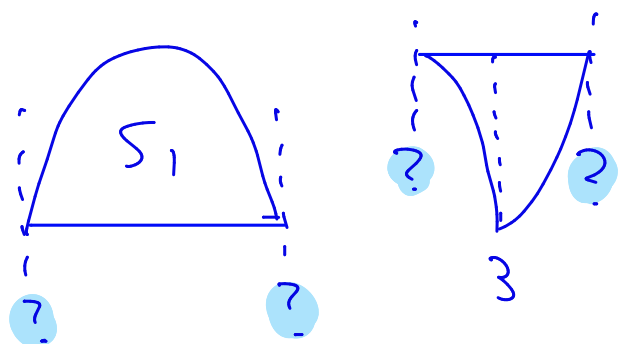
$C : y = |(x - 3)(x + 3)|, \quad l : y = a$

曲線 C と直線 l で囲まれる図形のうち、 $y \geq a$ の領域にある部分の面積を S_1 、 $y \leq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

★まずはグラフを書いて設定を理解!

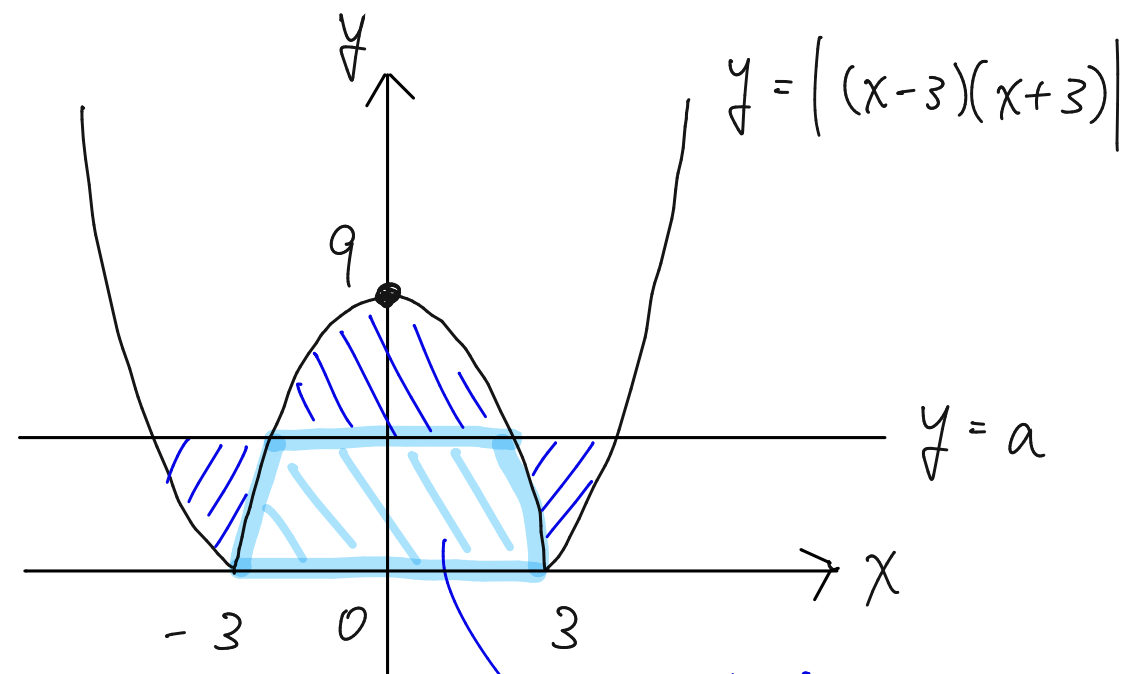


面積 → 交点の情報が必要.



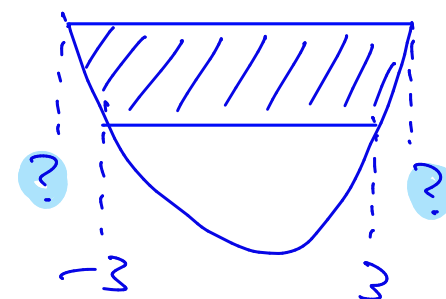
めんどくさい...

処理をラクにする方法を考えよう!

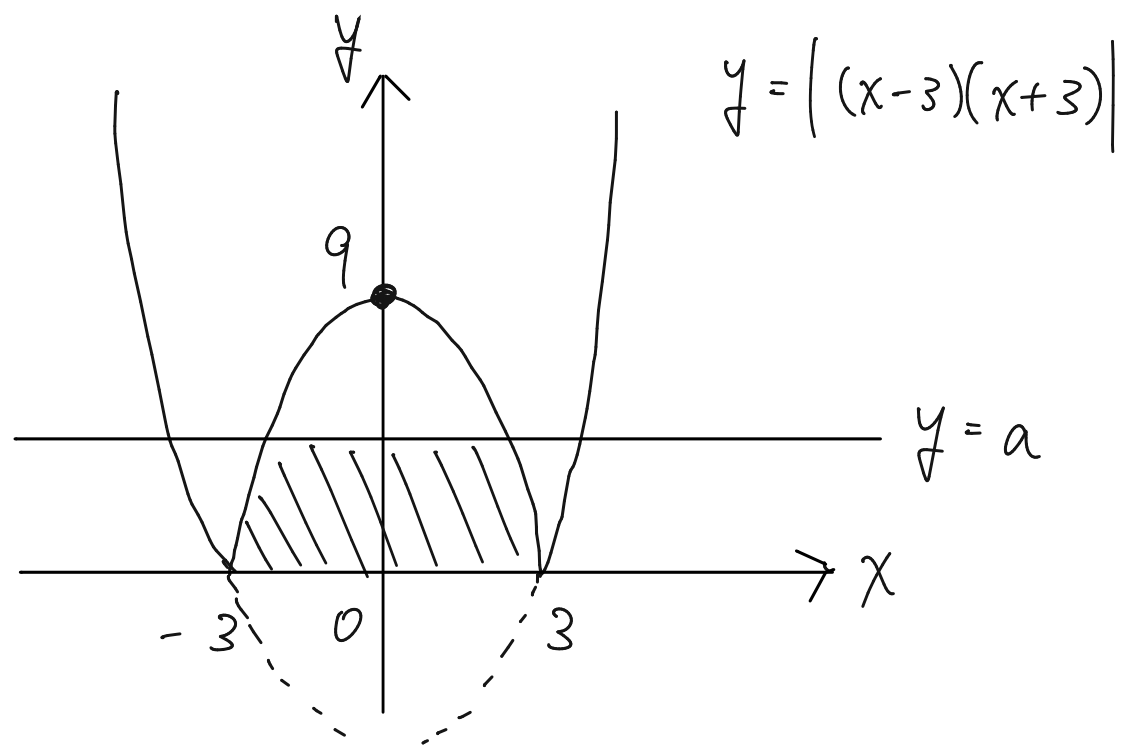


ここを加起来 $S_1 = S_2$ を考えてもOK.

→ S_1 はめっちゃラクになるし、
 S_2 も



「ア」ラクになる
交点だけ!



図の斜線部分の面積を S_3 とすると、

$$\begin{aligned}
 S_1 + S_3 &= \int_{-3}^3 (-(x-3)(x+3)) dx \\
 &= \frac{1}{6} (3 - (-3))^3 \\
 &= \underline{36} \quad \leftarrow \text{こっちはOK.}
 \end{aligned}$$

ここで、 $y = (x-3)(x+3)$ と $y = a$ の交点 x を求めよう。 $0 < a < 9$ に注意して、

$$\begin{aligned}
 (x-3)(x+3) &= a \\
 x^2 &= a+9 \\
 x &= \pm \sqrt{a+9} \quad \text{となる。}
 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
 S_2 + S_3 &= \int_{-\sqrt{a+9}}^{\sqrt{a+9}} (a - (x-3)(x+3)) dx \\
 &\quad - \int_{-3}^3 (-(x-3)(x+3)) dx
 \end{aligned}$$

実はこれは
求めよう。

$$= \frac{1}{6} (\sqrt{a+9} - (-\sqrt{a+9}))^3 - 36$$

$$= \frac{4}{3}(a+9)^{\frac{3}{2}} - 36 \quad \text{と求めらる。$$

∴で、

$$S_1 = S_2$$

$$\Leftrightarrow S_1 + S_3 = S_2 + S_3 \quad \text{で"あ"の"で"。}$$

$$36 = \frac{4}{3}(a+9)^{\frac{3}{2}} - 36 \quad \text{を解くと、}$$

$$(a+9)^{\frac{3}{2}} = 54$$

$$a+9 = 9 \cdot \sqrt[3]{4}$$

$$a = 9(\sqrt[3]{4} - 1)$$

 //

$$54 = 2 \cdot 3^3$$

$$\downarrow$$

$$54^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^2$$

$$= 9 \cdot \sqrt[3]{4}$$

を得る。