

九州大学 2024 理系第1問

a を実数とし、座標空間内の 3 点 $P(-1, 1, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(a, a^2, a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

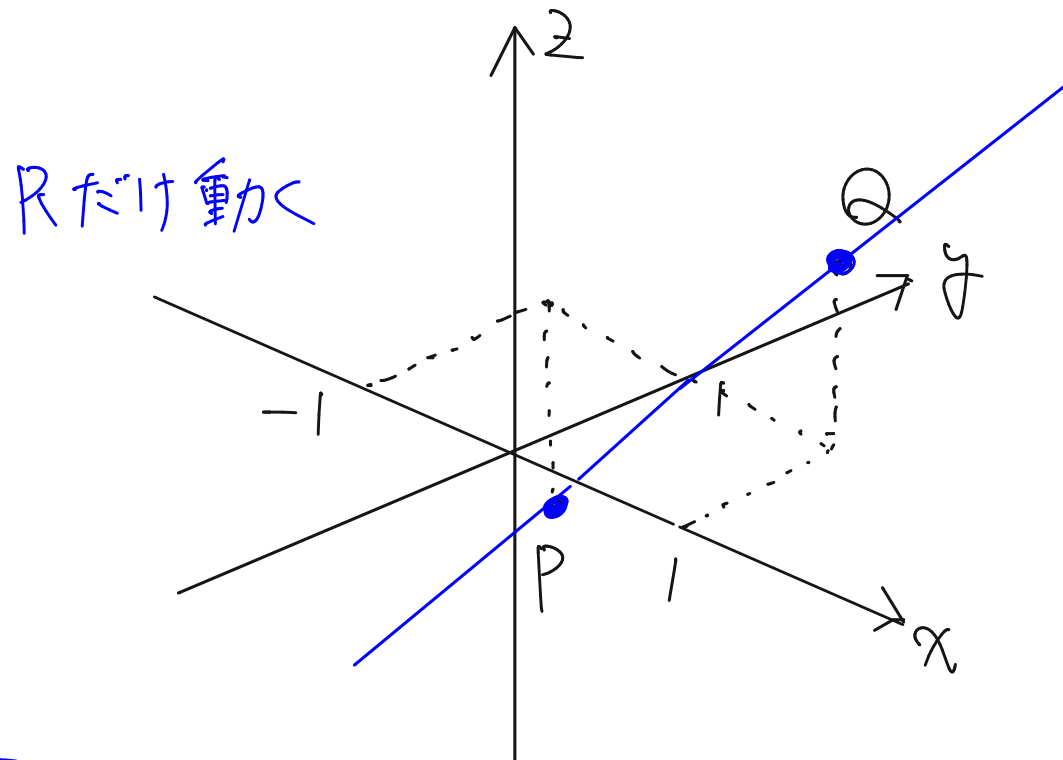
- (1) $a \neq -1$, $a \neq 1$ のとき、3 点 P, Q, R は一直線上にないことを示せ。
- (2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき、三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。



★まずは図やグラフが書けるときを書く！

→ 特殊性に気づきやすくなる

+ 設定を把握しやすくなる



(1) 「一直線上にない」を数式で捉えると
 $\vec{PR} = t \vec{PQ}$ となる実数 t が存在しない
こと。(後で詳しく)

ただ、図形的な視点も持っておくと◎

<すぐに思いつく解法>

P, Q は異なる2点なので、

3点 P, Q, R が一直線上にないための
必要十分条件は、

$$\vec{PR} = t \vec{PQ} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす実数 t が存在しないことである。
正しく式！

※ P と Q が同じ点だと同値じゃない！

※ Q が出てくるところを減らしたいので、
 $\vec{PQ}$ を t 倍したくなる。

※ 一直線上にある $\Leftrightarrow$ 上の式を満たす
実数 t が存在
なので、どちらも否定しても同値！

あとは成分ごとに連立！

ここで、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+1 \\ a^2-1 \\ a^3+1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=2k \\ a^2-1=0 \dots \textcircled{2} \\ a^3+1=2k \end{cases}$$

←「かつ」で
結びたい

であり、 $a \neq \pm 1$ のとき $\textcircled{2}$ は成り立たない
ので、 $\textcircled{1}$ を満たす実数 k は存在しない
ことがわかる。

よって 3点 P, Q, R は一直線上にない。 

<視覚的な別解>

P, Q の y 座標が等しいこと、
 R の y 座標 $\neq 1$ に注目!

P, Q は相異なる2点であり、

P, Q の y 座標に着目すると、
直線 PQ は平面 $y=1$ 上に存在する。

直線の式を出さなくても
これで+1!

一方、 R の y 座標は、 $a \neq \pm 1$ のとき
 $a^2 \neq 1$ なので、 R は平面 $y=1$ 上には
存在せず、直線 PQ 上にないことが
示される。 

(2) a を変化させたときの R の軌跡は
よくわからないので、ゴリゴリ数式
で進めていくことにする。

$\triangle PQR$ の面積を A で表すと、

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{PQ}|^2 |\vec{PR}|^2 - (\vec{PQ} \cdot \vec{PR})^2} \dots \textcircled{3}$$

※ すごいメンドクさそうなので、ミスしないように
小分けにして計算を進める。

ここで、

$$|\vec{PQ}|^2 |\vec{PR}|^2 = 8 \times \left((a+1)^2 + (a^2-1)^2 + (a^3+1)^2 \right)$$

最大値求めたいので、基本的には
展開に向かっていくが、ここではまとめて
ミスを減らすことを優先！

$$= 8(a+1)^2 \left(1 + (a-1)^2 + (a^2-a+1)^2 \right)$$

$$= 8(a+1)^2 (a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3)$$

★ a に具体的な値を入れながらチェック

$$\begin{aligned} (\vec{PQ} \cdot \vec{PR})^2 &= \left(2(a+1) + 2(a^3+1) \right)^2 \\ &= 4(a+1)^2 \left(1 + (a^2-a+1) \right)^2 \\ &= 4(a+1)^2 (a^4 - 2a^3 + 5a^2 - 4a + 4) \end{aligned}$$

より、③は

$$\Delta PQR = \frac{1}{2} \sqrt{8(a+1)^2 (a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3) - 4(a+1)^2 (a^4 - 2a^3 + 5a^2 - 4a + 4)}$$

一旦計算

$$= (a+1)$$

$$\sqrt{2(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 4a + 3) - (a^4 - 2a^3 + 5a^2 - 4a + 4)}$$

→ $-1 < a < 1$ あり！

$$= (a+1) \sqrt{a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 2}$$

$$= \sqrt{a^6 - 3a^2 + 2} \dots \textcircled{4}$$

中身を最大にすればOK.

と表せる。

ここで、 $f(a) = a^6 - 3a^2 + 2$ とおき、

$-1 < a < 1$ での $f(a)$ の最大値を考える。

※ $a^2 = t$ などと置いてももちろんOK

だが、項も多くないのでこのままで行く。

$$\begin{aligned} f'(a) &= 6a^5 - 6a \\ &= 6a(a^4 - 1) \end{aligned}$$

$$= 6a(a^4 - 1) \leftarrow \text{さらに因数分解できるが、} -1 < a < 1 \text{ で}$$

a^{q-1} の符号は確定する
 ので、ここからで十分!

 $f'(a), f(a)$ の

$-1 < a < 1$ での増減は

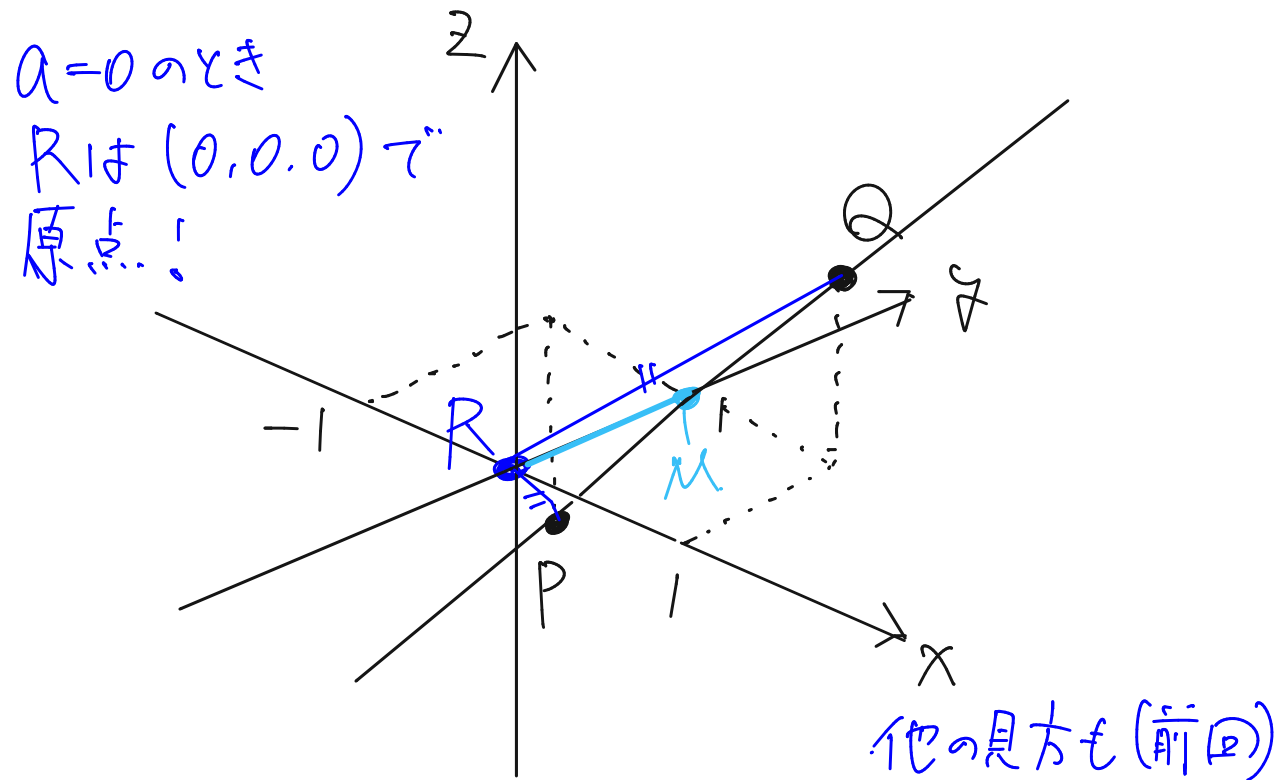
a	$-$	$ $	$\dots$	0	$\dots$	$ $
$f'(a)$			$+$	0	$-$	
$f(a)$			$\nearrow$			$\searrow$

と f_2 の γ' .

$a=0$ のときに $\frac{E}{2}$ 最大値 2 をとる。

よって、④より $\triangle PQR$ の最大値は $\sqrt{2}$ と求められる。

☆ 検算！ 内積とかを計算してもいいが、
図形的に確認できる。



$RP = RQ = \sqrt{3}$ より $\triangle RPQ$ は二等辺となり、
 R から PQ に下した垂線の足は PQ の中点、
 $(0, 1, 0)$ となる。 $\rightarrow M$ とおく。

$RM = 1$ を与えるに得るので、

$$\Delta PQR = \frac{1}{2} \times PQ \times RM = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

7 ok 30!