複素数平面・図形への応用⑥　北海道大学 2018 理系第2問

数学III特講

過去問

$z+\dfrac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

(1) D を複素数平面上に図示せよ。

(2) k を実数とする。D に属する z で方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$ を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし、i は虚数単位を表す。

(1) 実数条件：

複素数 z が実数 $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$

$\longrightarrow$ $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とおかなくても、複素数のまま議論できる。

$$\begin{cases} z \neq 0 \\ z + \dfrac{4}{z} \text{ が実数} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ z + \dfrac{4}{z} = \overline{z} + \dfrac{4}{\overline{z}} \end{cases}$$

$\times z\overline{z}$ ($z \neq 0$ のもと同値)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ z^2\overline{z} + 4\overline{z} = z\overline{z}^2 + 4z \end{cases}$$

因数分解して小さく分割

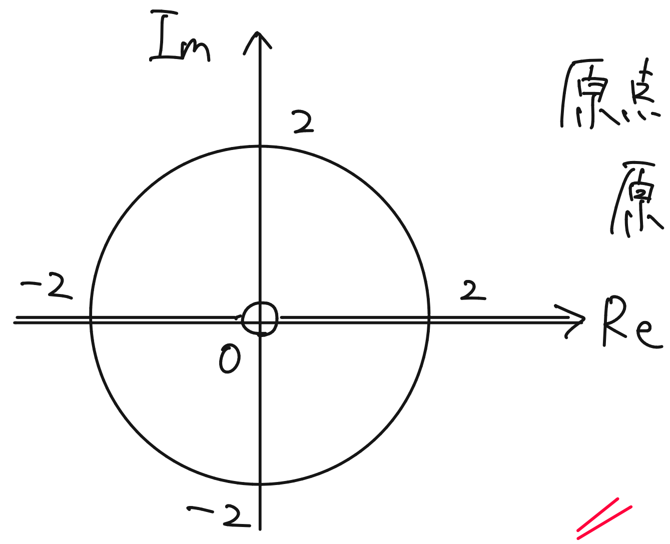
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ \underbrace{z\overline{z}}_{|z|^2}(z - \overline{z}) - 4(z - \overline{z}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ (z - \overline{z})(|z|^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ \underline{z = \overline{z}} \end{cases} \text{ 又は } \underline{|z| = 2}$$

z は実数！　　$z \neq 0$ も満たす

よって、D を図示すると、



原点以外の実軸上と原点中心、半径 2 の円周上。

(2) よくわからない方程式が与えられたときは
まずは式をほぐしながら方針を考える。
(わかるところから検討，困難は分割せよ)

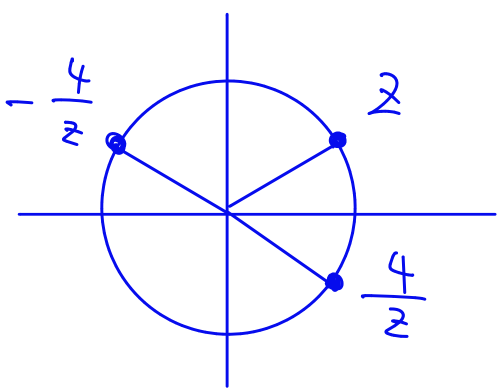
$z \in D$ で，

$$\underbrace{k\left(\underbrace{z+\frac{4}{z}}_{\text{実数}}+8\right)}_{\text{実数}} = i\left(z-\frac{4}{z}\right)$$

を満たす z が存在．

→ $i\left(z-\frac{4}{z}\right)$ も実数
→ これは z が実数のときはダメそう．
(0はOK)

z が円周上 $(|z|^2=4)$ のときは，
$z-\frac{4}{z}$ は虚軸上
ゆえOKそう．



→ (i)の2つで場合分けして調べて，
z が存在するような k の範囲を考える．
(最後に和集合とればOK)

$$k\left(z+\frac{4}{z}+8\right) = i\left(z-\frac{4}{z}\right) \quad \cdots ①$$

(i) 原点以外の実軸上の点に対応する
複素数 z で，①を満たすものが存在する
ための k の条件を求める。
①の左辺は実数より，右辺も実数。
よって $z-\frac{4}{z}=0$ ← $z\in\mathbb{R}$ で解く。 絞りこめる．
$\iff z=\pm 2$ が解の候補．
これらを①に代入すると，$k=0$ のとき
成立するので，求める k の条件は
$k=0$

(ii) 原点中心、半径2の円周上の点に対応する複素数 z で、①を満たすものが存在するための k の条件を求める。

→ 今回は絞り込めないので、
実数パラメータを使って解を表す。
扱いやすいので.

$$z = 2(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とおくと、①より

$$k(4\cos\theta + 8) = -4\sin\theta$$

$\left(\because \dfrac{4}{z} = 2(\cos\theta - i\sin\theta)\right)$

これを満たす θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ が存在するための k の条件を求める.

$$\Longleftrightarrow \quad k = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta + 2} \leftarrow \text{定数分離}$$

このとりうる値の範囲わかればOK.

ここで、

$$f(\theta) = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta + 2}$$ とおくと、

$$f'(\theta) = \frac{-\cos\theta(\cos\theta + 2) + \sin\theta(-\sin\theta)}{(\cos\theta + 2)^2}$$

$$= \frac{-2\cos\theta - 1}{(\cos\theta + 2)^2}$$ より $f(\theta)$ の増減は

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

となるので、

求める k の条件は $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

以上(i)(ii)より、k の値の範囲は

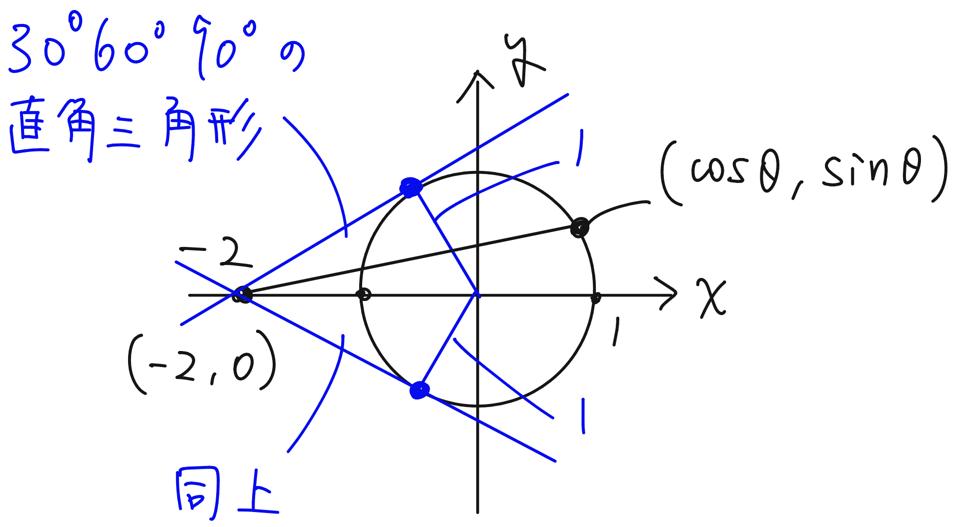
$-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となる。

<おまけ>

$f(\theta) = \dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta + 2}$ のとりうる値の範囲を視覚的に考える。

ここでは、$-f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta + 2}$ を考える。

これは、$(\cos\theta, \sin\theta)$ と $(-2, 0)$ を結ぶ直線の傾きを表す。



θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ で動かしたとき、

図より $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq -f(\theta) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ が得られる。

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq f(\theta) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

さっきの結論と一致!