数学Ⅲ特講

良問演習

極限②　三角関数の極限

次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos 2x)}{x^2}$

<おまけ> $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ を求めよ。

$\boxed{\text{ポイント}}$ 三角関数の極限のあれこれ

道具としては

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\frac{0}{0}$ の不定形!!

を使いこなすこと! これに尽きる。
これを示す準備として色々見ていきます…

◎関数の極限について少しだけ厳密に。

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$ について考える。

- aとは異なる値をとりながら近づける
- あらゆる近づけ方を考える
- 限りなく近づける

→ こんな色んな意味が含まれる…

大学ではこれを数式で定義することに。

$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ とは、任意の正の実数
ε(イプシロン)に対して、ある正の実数
δ(デルタ)が存在して、

$$\underline{0 < |x - a| < \delta} \Rightarrow \underline{|f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

が成り立つこと。

これが x を a に「近づける」正体。

これが $f(x)$ が ℓ に「近づく」正体。

※いわゆる ε-δ 論法と呼ばれるもので、
カッコよく書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ [\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \,]$$

この定義よりほぼ明らかな通り。

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = l \\ \displaystyle\iff \lim_{x\to a+0} f(x) = l \ \text{かつ}\ \lim_{x\to a-0} f(x) = l\end{array}}$$

右側から近づける 右側極限 $0 < x-a < \delta$ に相当

左側から近づける 左側極限 $-\delta < x-a < 0$ に相当

これを使って、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を示す。

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ や $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の定義

までは、ここでは扱いません。後者は ε-N 論法と呼ばれます。古賀さんなどを参照！

☆ ここでは教科書の証明を解説します！（あとで補足あり）

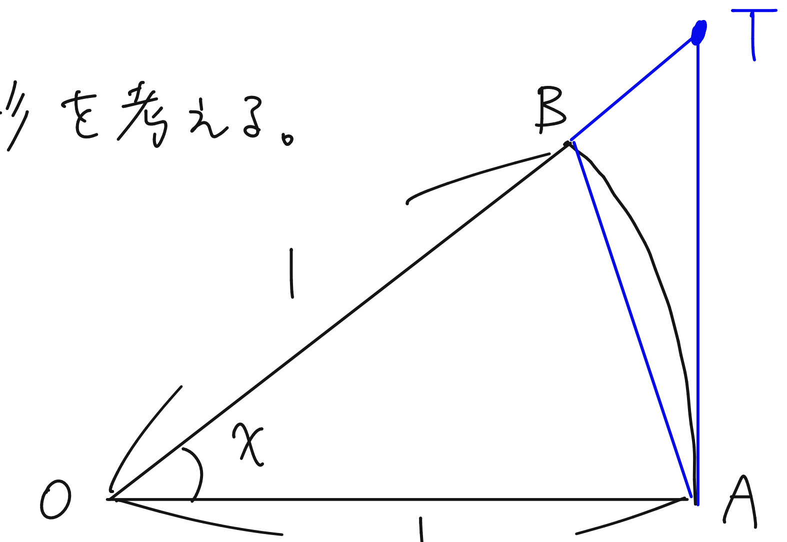
まず $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を示す。

$0+0$ の略

十分に小さい $x>0$ を考えて、中心角 x [rad]

どれくらい？

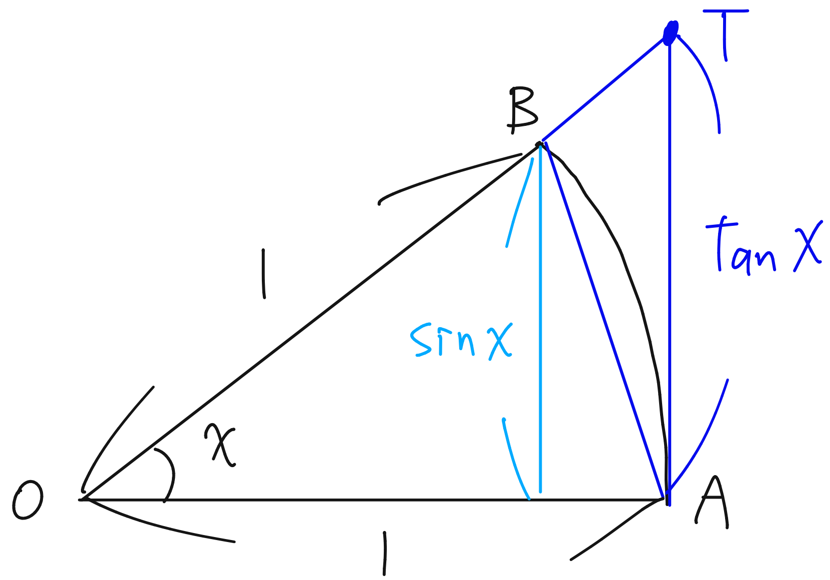
半径1の扇形を考える。



このとき、図より、

$\triangle OAB$ の面積 < 扇形 OAB の面積 < $\triangle OAT$ の面積

が成り立つ。



つまり、

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x}_{\triangle OAB} < \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x}_{\text{扇形の面積}} < \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x}_{\triangle OAT}$$

$$\sin x < x < \tan x$$

辺々を $\sin x$ で割って、 ← $\sin x > 0$ より OK.

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad (\text{全て正})$$

逆数をとると、 $1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$

ここで

$\displaystyle\lim_{x\to+0} \cos x = 1$ より、はさみうちの原理から

$\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ となる。

$x<0$ の場合、$x=-t$ とおくと $t>0$ となり、

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t} \rightarrow -\sin t$$

$$= \lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

↑ 上で示した!

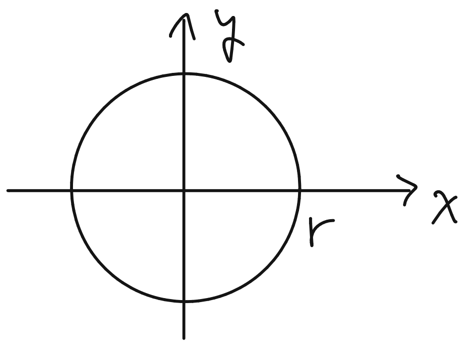
以上より

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = 1$

なので、 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つ。

※補足（循環論法について）

扇形の面積を求める際に、
円の面積公式を使っている。
じゃあ円の面積ってどう証明するの？
→ 積分で計算できる。



$$\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

これは例えば $x = \cos\theta$ と置換して
求められる。でも $\cos\theta$ の導関数の証明
に $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ が登場してるじゃん！

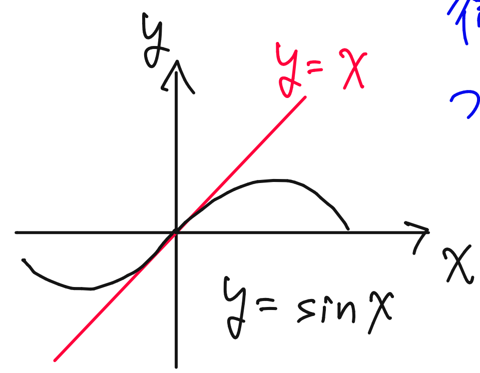
というようなツッコミ。

ここでは深く立ち入らないものの、
弧長を使った、循環論法を避けた
証明もあるので、気になった方は
新潟工科大学の先生のペーパーなどを
見てみて下さい！

㊙ $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ の導関数的な見方

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = 1$$

これは $y = \sin x$ の $x = 0$ での
微分係数を表す!!
つまり接線の傾きは 1.



こんなイメージ
思ったより sin は平ら

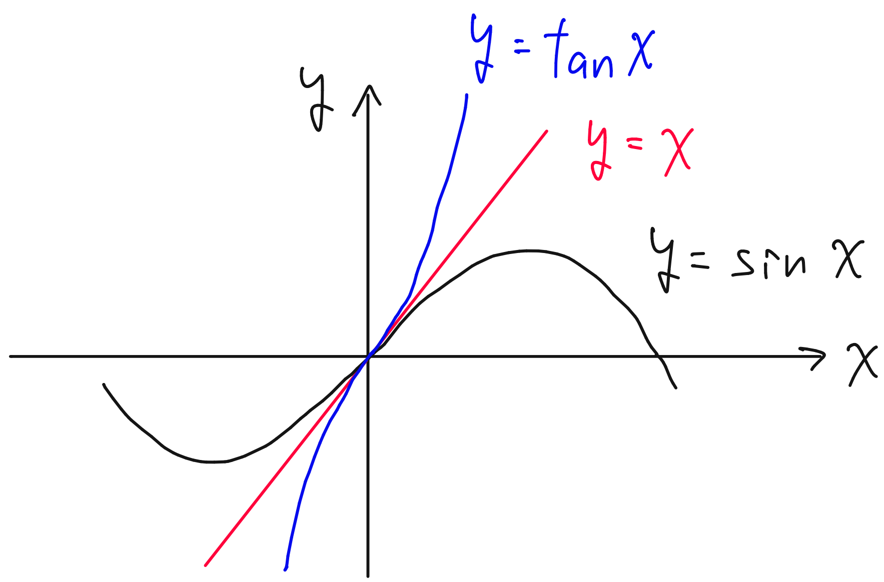
ちなみに あとで見るように

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan 0}{x-0}=1$$

となり、$y=\tan x$ の $x=0$ での微分係数も1になる!

まとめて、$y=\tan x$, $y=x$, $y=\sin x$ の位置関係は以下の通り。

(厳密には大小関係を示す必要)



▨ この公式の使い方。

三角関数の不定形があったら、ひたすらにこの形を作り出す! 1つ1つ変形していく。

sinにするのと。 $\dfrac{\sin \blacksquare}{\blacksquare}$ ここをそろえるのが大事!

- $\cos x \to 1$ にいくのでok.
- $1-\cos x \to \times(1+\cos x)$ か2倍角で $\sin^2 x$ へ
- $\tan x \to \dfrac{\sin x}{\cos x}$ にして出現させる

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

分子に2倍角でもok.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1$$

この式は覚えても損はないです。

解説 おまたせしました…！

(1) lim をわざわざ書くのがメンドい場合は書かなくても OK（記述を間違えないように！）

十分小さな $x\ (\neq 0)$ で考えてよい。

$$\frac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{x} \quad \cdots ①$$

$\frac{0}{0}$ の不定形！ 困った。

↓

頑張って解消する。

↓

分子がルートを含む形

↓

分子を有理化しよう！（前問の復習）

$$① = \frac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}}{\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}}$$

$$= \underbrace{\frac{2\sin 2x}{x}}_{\text{まだ不定形だけど}\ \frac{\sin x}{x}\ \text{の形にできる}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}}}_{\text{不定形じゃなく、確定。}}$$

→ OK

$$= 4\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}}$$

そろえる!! → 分子を2倍角でそろえてもOK

$$\xrightarrow[x\to 0]{} 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 2$$

※ わからない方は、

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}$ で $2x=t$ と置換して考えよう。

(2) 十分小さな $x\ (\neq 0)$ で考えてよい。

$$\frac{\sin(1-\cos 2x)}{x^2}$$ ← $\frac{0}{0}$ の不定形の形

$\frac{\sin x}{x}$ の形を目指す

$$= \underbrace{\frac{\sin(1-\cos 2x)}{1-\cos 2x}}_{1にいくのでOK} \cdot \underbrace{\frac{1-\cos 2x}{x^2}}_{}$$

そろえる!!

まだ $\frac{0}{0}$ の不定形…
sin を出したい!

$$= \frac{\sin(1-\cos 2x)}{1-\cos 2x} \cdot \frac{1-\cos 2x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

OK ←

※ 2倍角で sin を作ると、実はもっとラク。

$$= \frac{\sin(1-\cos 2x)}{1-\cos 2x} \cdot \frac{\sin^2 2x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos 2x}$$

おしい! 中身をそろえる!

$$= \frac{\sin(1-\cos 2x)}{1-\cos 2x} \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{4}{1+\cos 2x}}_{ここは確定! 解けた!}$$

4 ← 調整

↑ $4x^2$ になる.

$$\xrightarrow[x \to 0]{} 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$ //

☆ 不定形 → 解消 の大きな流れ.

☆ 三角関数の極限は、sin にする & 中身をそろえて、$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ で解消できる!

☆ 慣れるまでは、1つずつ不定形を解消するのがオススメ!! 一気にやろうとしない.

☆ $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$ が言えるのは、$f(x)$, $g(x)$ が収束するときのみ!

(+ − ÷ も)

おまけ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$$ → これは不定形？

$x \to \infty$ だけど
$\sin x \to -1 \sim 1$ で振動

直感で「$\frac{-1 \sim 1}{\infty}$ なら 0 だなあ」と
わかるものの、きちんと示すには
はさみうちの原理が有効。 動くものを定数ではさみこむ

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より、$x > 0$ に対して

$$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$ が成り立つ。

ここで、$\lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x} = 0$，$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ より、

はさみうちの原理から、$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ となる //