北海道大学 2023 理系第3問

以下の問いに答えよ。ただし、e は自然対数の底を表す。

(1) k を実数の定数とし、$f(x) = xe^{-x}$ とおく。方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし、$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ を用いてもよい。

(2) $xye^{-(x+y)} = c$ をみたす正の実数 x, y の組がただ 1 つ存在するときの実数 c の値を求めよ。

(3) $xye^{-(x+y)} = \dfrac{3}{e^4}$ をみたす正の実数 x, y を考えるとき、y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ。

誘惑のない動画や公式検索アプリ okke

(1) $f(x)=0$ の実数解の個数について.

実数解を直接求められないとき
→ 実数解の個数をグラフの共有点の個数で調べられる.
→ 定数分離など、調べやすくする工夫も大事(今回はそうなってる)

$xe^{-x}=k$ の異なる実数解の個数と $y=xe^{-x}$ と $y=k$ のグラフの共有点の個数は一致する。

以下 $y=\underbrace{xe^{-x}}_{f(x)}$ のグラフを考える。 → これはパシっと書ける. ビ分

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$$
$$=(1-x)e^{-x}$$ より.

$f(x)$の増減は

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

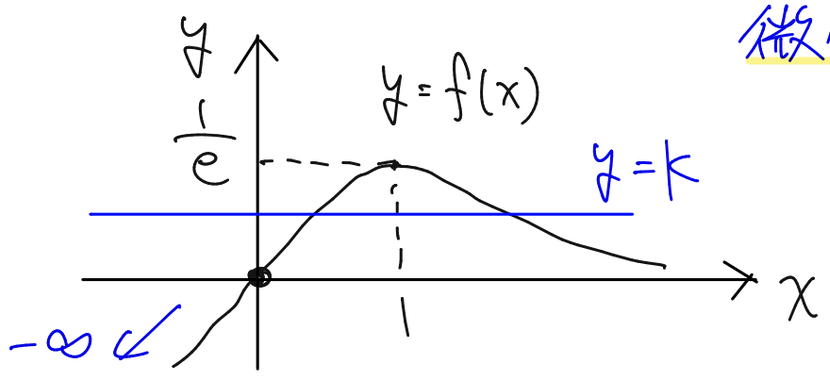
となる。

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x}}$$ ($x\to-\infty$, $e^x\to 0$)

$$=-\infty$$

$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ ←問題より.
(証明できる? 数学Ⅲ特講 微分グラフ①でﾂﾞ)

より. グラフは



となる。

よって、$y=xe^{-x}$ と $y=k$ のグラフの共有点の個数を考えて、

$$\begin{cases} k>\frac{1}{e} & \text{のとき} \quad 0\text{個} \\ k=\frac{1}{e} & \text{のとき} \quad 1\text{個} \\ 0\leqq k<\frac{1}{e} & \text{のとき} \quad 2\text{個} \\ k\leqq 0 & \text{のとき} \quad 1\text{個} \end{cases}$$

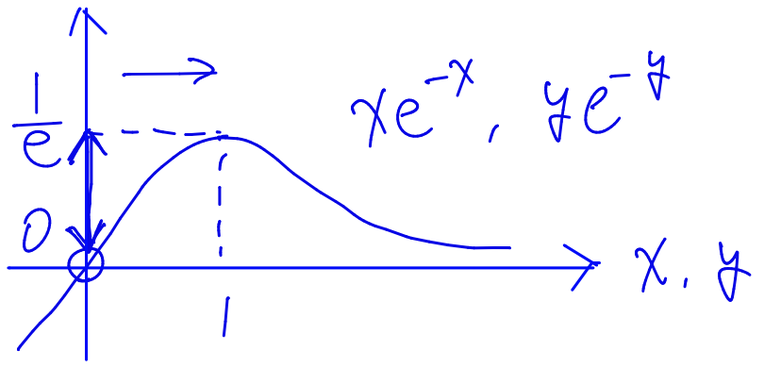
を得る。

(2) どうやって(1)を使える形にするか？

$$xye^{-(x+y)}=c$$
$$\Leftrightarrow xye^{-x}\cdot e^{-y}=c$$
$$\Leftrightarrow \underline{xe^{-x}}\cdot\underline{ye^{-y}}=c \quad \cdots ①$$

(1)の関数が出現！

$x,y>0$ なので、(1)の結果から関数の状況を整理しておく。



xe^{-x} も ye^{-y} も、0より大きく $\frac{1}{e}$ 以下の値を全てとる。

でも基本的に1つの値に対して x や y は2つずつ存在する。

$\frac{1}{e}$ 以外は!!

→ ①を満たす x,y (>0) がただ1つなら、$\frac{1}{e}\times\frac{1}{e}$ しかないのでは…？

ここで、(1)の議論より、xe^{-x}, ye^{-y} について、$x, y>0$ での値域は

とりうる値の範囲

$$\begin{cases} 0<xe^{-x}\leqq\dfrac{1}{e} \\ 0<ye^{-y}\leqq\dfrac{1}{e} \end{cases}$$

であり、値が

0より大きく $\frac{1}{e}$ 未満のとき、対応する

xやyは2コずつ存在し、

$\frac{1}{e}$のとき対応するxやyはただ1コ

存在する。

よって、①の左辺の値域は

$$0<xe^{-x}\cdot ye^{-y}\leqq\frac{1}{e^2}$$

であり、

①を満たすx, y (>0)の組が

ただ1つ存在するためのcの

必要十分条件は $c=\dfrac{1}{e^2}$ である。

丁寧に書くなら…

☺ $0<xe^{-x}\cdot ye^{-y}<\dfrac{1}{e^2}$ のとき、

(xe^{-x}, ye^{-y})の組は無数に

存在し、(x, y)の組も無数に

存在する。

(もしくは、"少なくともどちらか一方は

$\frac{1}{e}$未満となるので、(x, y)の組が

2つ以上となる。でもOK)

逆に、$xe^{-x}\cdot ye^{-y}=\dfrac{1}{e^2}$

$\Leftrightarrow xe^{-x}=\dfrac{1}{e}$ かつ $ye^{-y}=\dfrac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x=1$ かつ $y=1$ ←これしかない!!

でただ1つとなるのでOK.

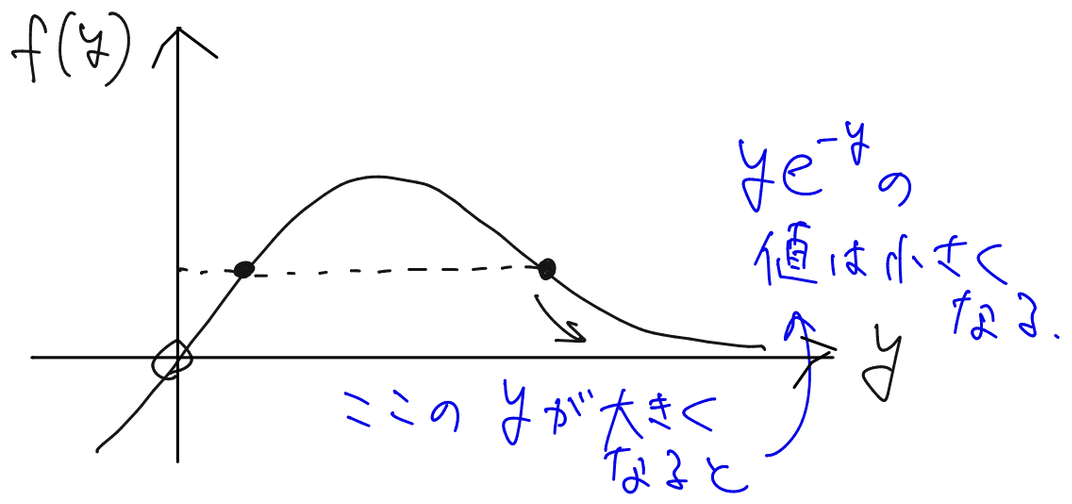
(3) (2)の流れで分ける.
いきなり y の値考えるのはムリ!!
→ ye^{-y} から考える.

$$xe^{-x}\cdot ye^{-y}=\frac{3}{e^4} \quad \cdots ②$$

→ 組み合わせたくさん.

を満たす正の x, y を考えて、
y のとりうる値が最大となるとき、
$f(y)=ye^{-y}$ のグラフを考えると
ye^{-y} の値は最小となる。

言い換え!!



→ どこまでも小さくなれる?
いや、xe^{-x} にも範囲があるので、
それによる.

(2)と同様に x, $y>0$ での値域は

$$\begin{cases} 0<xe^{-x}\leqq\dfrac{1}{e} \\ 0<ye^{-y}\leqq\dfrac{1}{e} \end{cases}$$

なので、

②を満たす ye^{-y} の値が最小となるのは、$xe^{-x}=\dfrac{1}{e}$ のときであり、

このとき $\dfrac{1}{e}\cdot ye^{-y}=\dfrac{3}{e^4}$

$$ye^{-y}=\frac{3}{e^3} \quad \cdots ③$$

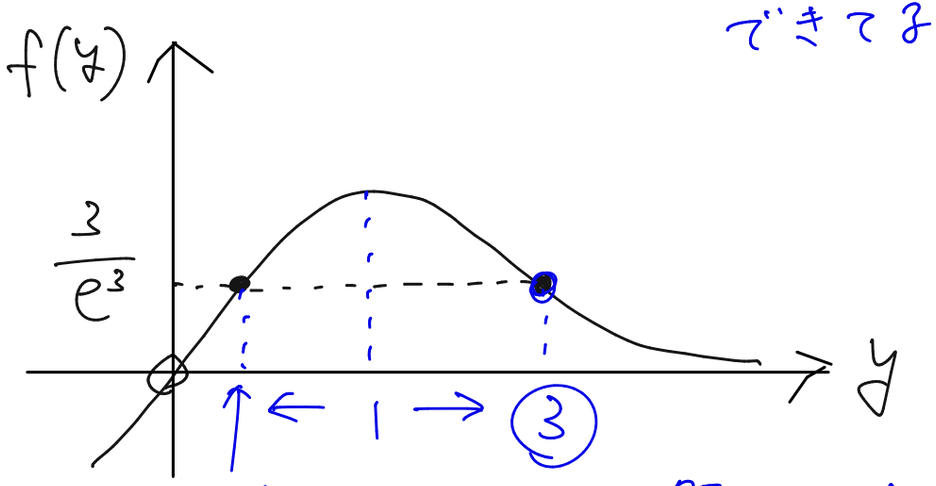
である。

$0<\dfrac{3}{e^3}<\dfrac{1}{e}$ なので、グラフを考えて

③の解は、より大きいものと小さいもので1つずつある。 ← 記述上大事! why

ここで、③で $y=3$ とすると成り立ち、
$3>1$ なので、求める
y の最大値は 3
である。

$ye^{-y}=3e^{-3}$
そういうように
できてる!!



わからん.　これだけ解わかる!
かつ、これより大きい解はない
(もう1つは1より小さいため)
→ これが最大.

x の値は、$xe^{-x}=\frac{1}{e}$ より、$x=1$ である。