積分・計算と方程式⑥ 東北大学 2019 理系第5問

数学III特講

過去問

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1+e^x)\,f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^{1} (e^x - e^t + 1)\,f(t)\,dt$$

(1) どの2つをどう示すか.

$$\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$ は計算すればいけそう.

あとはいずれにせよ

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx$$ を考えていく必要…

まず,

$$\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \quad \cdots ①$$ が示される。

次に, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx$ について.

☆ 計算・方程式編 ① を復習しよう!

置換して協力プレイ (King Property の活用例)

$x=-t$ と置換すると. ← 理由はあとで

x	$-1 \to 1$
t	$1 \to -1$

$dx = -dt$ より.

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx = \int_1^{-1} \frac{\sin^2(-\pi t)}{1+e^{-t}}(-dt)$$

分母分子に $\times e^t$

$$= \int_{-1}^1 \frac{e^t\sin^2(\pi t)}{1+e^t}\,dt$$

x に変えても同じ

この値を I とおくと.

$$2I = \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx + \int_{-1}^1 \frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx$$

1 区間そろってる! 2 足してキレイな数になる!

$$= \int_{-1}^{1} \sin^2(\pi x)\,dx$$ → 計算して 1 でもOK.

$$= 2\int_{0}^{1} \sin^2(\pi x)\,dx$$ ($\because$ 被積分関数が偶関数)

よって $I = \int_{0}^{1} \sin^2(\pi x)\,dx$ となり.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\,dx = \int_{0}^{1} \sin^2(\pi x)\,dx \quad \cdots ②$$

が示される。以上①②より題意は示された。

☆ $x=-t$ がどこから来たか？

[1] を見越すと、$x=-t$ は納得でき、

[2] に気付くとガッツポーズ.

→ King Property で足してキレイになるケースに有効

(2)

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^{1} (e^x - e^t + 1) f(t)\,dt$$

☆ 計算・方程式編③ を復習しよう！

流れとしては定番

- いきなり $f(x)$ は求まらない. ($f(t)$ が不明)
- → 定積分の部分を文字を使って表す
- → $f(x)$ のイメージがつかめて、$f(t)$ もわかる
- → 定積分が求められるので、連立して未知数を決定する！

※ やみくもに (1) から出発するのではなく、上の流れの途中で使いそうだなというイメージが持てると完ぺキ.

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^{1} (e^x - e^t + 1) f(t)\,dt$$

x 入ってるので注意.

$$= \sin^2(\pi x) + (e^x+1)\int_{-1}^{1} f(t)\,dt - \int_{-1}^{1} e^t f(t)\,dt$$

処理の工夫.

定数!

ここで, $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = a$, $\int_{-1}^{1} e^t f(t)\,dt = b$ と

おくと.

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + a(e^x+1) - b$$

$1+e^x \neq 0$ より

$$f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} + a - \frac{b}{1+e^x} \quad \cdots ☆$$

となる。

→ 2つ定積分求めて, 連立する.

このとき.

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t} + a - \frac{b}{1+e^t}\right)dt \quad \cdots ③$$

(1)で求めた!

計算・方程式編 ①

となり, それぞれ

・ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t}\,dt = \frac{1}{2} \quad (\because (1))$

・ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right)dt$

$\frac{f'}{f}$ の形

$$= \Big[t - \log(1+e^t)\Big]_{-1}^{1}$$

$$= 2 - 1 = 1$$

☆細かく分けてミス防止!

なので③は

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{2} + 2a - b$$ となる。

これが a と等しいので

$$\frac{1}{2} + 2a - b = a$$

$$a - b = -\frac{1}{2} \quad \cdots ④$$ を得る。

次に、

$$\int_{-1}^{1} e^t f(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{e^t \sin^2(\pi t)}{1+e^t} + ae^t - \frac{be^t}{1+e^t} \right) dt \quad \cdots ⑤$$

について、それぞれ

☆細かく分けてミス防止!

- $\int_{-1}^{1} \frac{e^t \sin^2(\pi t)}{1+e^t}\,dt = \frac{1}{2}$ (∵(1)) 置換して I と等しいことを示した
- $\int_{-1}^{1} e^t\,dt = \left[e^t\right]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}$
- $\int_{-1}^{1} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \left[\log(1+e^t)\right]_{-1}^{1} = 1$

なので⑤は

$$\int_{-1}^{1} e^t f(t)\,dt = \frac{1}{2} + a\left(e - \frac{1}{e}\right) - b$$ となる。

これが b と等しいので

$$\frac{1}{2} + a\left(e - \frac{1}{e}\right) - b = b$$

$$a\left(e - \frac{1}{e}\right) - 2b = -\frac{1}{2} \quad \cdots ⑤$$ を得る

④⑤から a, b が求まる!(計算は大変)

⑤ - ④×2 より.

$$\left(e - \frac{1}{e} - 2\right)a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{e^2-2e-1}{e}\,a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{e}{2e^2-4e-2}$$

④より $b = a + \frac{1}{2} = \frac{e + (e^2-2e-1)}{2e^2-4e-2}$

$$= \frac{e^2-e-1}{2e^2-4e-2}$$

よって ☆ より

$$f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} - \frac{b}{1+e^x} + a$$

← 趣味的に並べ替え

$$= \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} - \frac{e^2-e-1}{2e^2-4e-2}\cdot\frac{1}{1+e^x} + \frac{e}{2e^2-4e-2}$$

となる。