大阪大学 2017 理系第5問

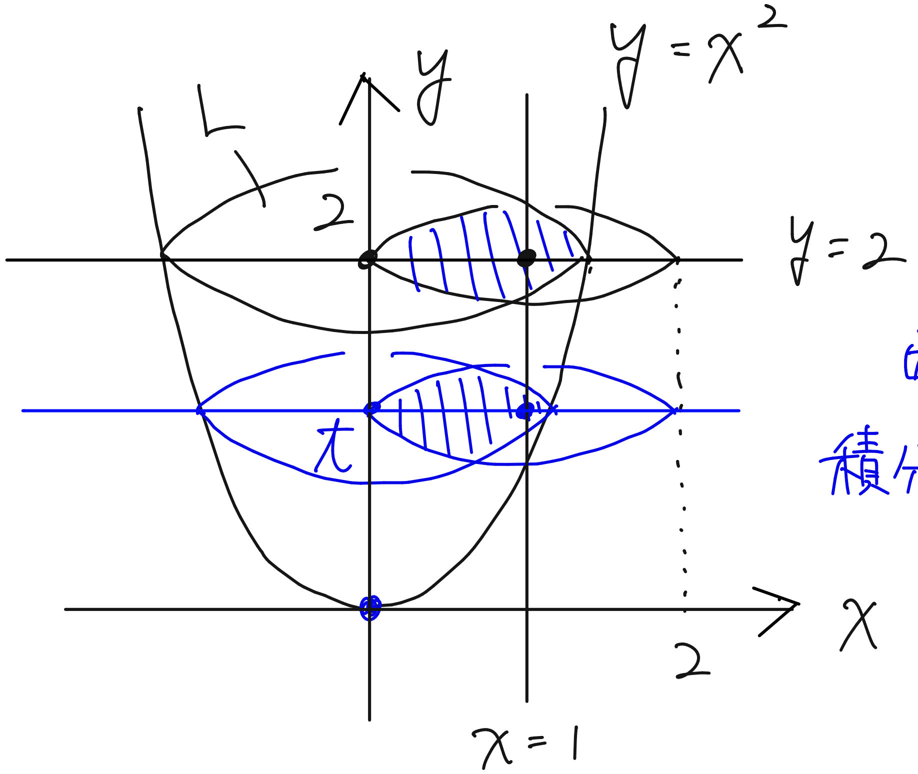
xy 平面上で放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2$ で囲まれた図形を、y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち、xy 平面上の直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1) t を $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0, t)$ を通り、y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。

$t = (2\cos\theta)^2 \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき、$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2) M の体積 V を求めよ。

★図形を書けるときはイメージでも書いておくと立式しやすい(場合分けにも気付ける)



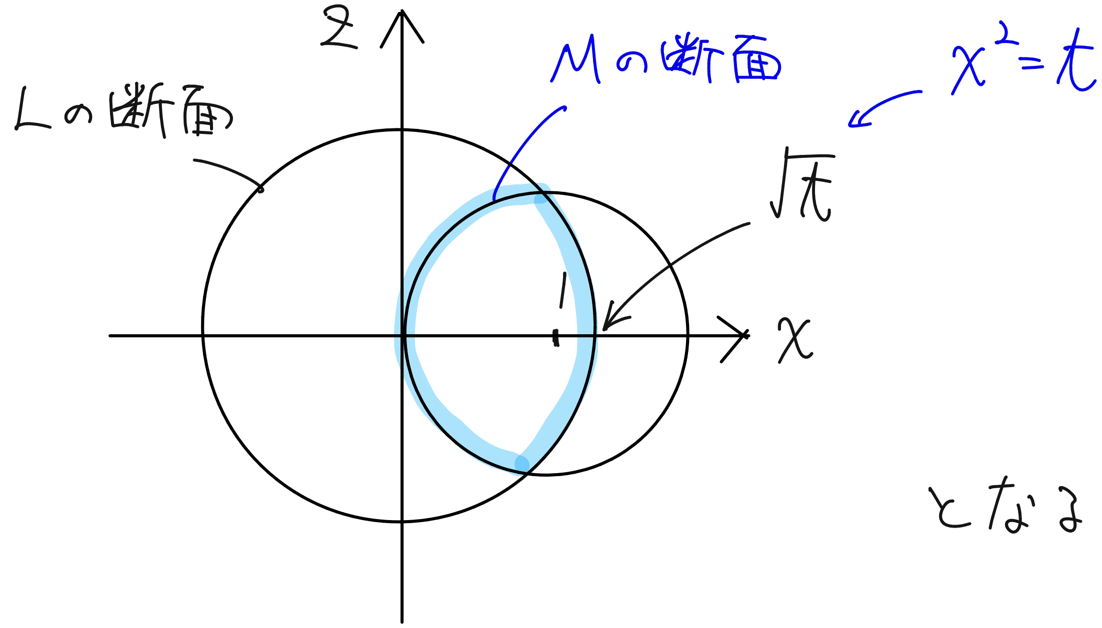
断面積
積分 ↓
体積

→場合分けも必要なさそう、いけそう!

(1) 断面図はしっかりグラフを考えよう。

x軸, y軸と垂直にz軸をとり、
Mの $y=t$ $(0\leqq t\leqq 2)$ での切り口を

xz平面に映すと、



となる。

Lの断面は、$x^2+z^2\leqq t$ であり、
これと領域 $(x-1)^2+z^2\leqq 1$ の共通部分
がMの断面である。

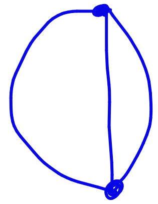
$t=(2\cos\theta)^2$ $\left(\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ のとき、

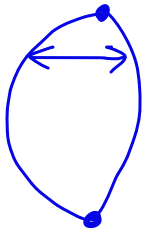
θ	$\frac{\pi}{4}$	→	$\frac{\pi}{2}$
t	2	→	0

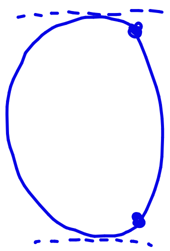
どうやって $S(t)$ 計算する??

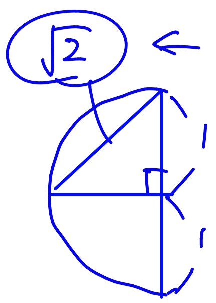
$$\begin{cases} x^2+z^2=t \\ (x-1)^2+z^2=1 \end{cases}$$

→ 簡単に解けそう。

→  で分けるか。

※  の積分で、場合分けせずにいってもいいが、

 の可能性がある。

(今回は 

がmaxなので

実は大丈夫なんだけど)

$$\begin{cases} x^2+z^2=(2\cos\theta)^2 & \cdots ① \\ (x-1)^2+z^2=1 & \cdots ② \end{cases}$$

を解くと、

①−②より

$$2x-1=(2\cos\theta)^2-1$$

$$x=2\cos^2\theta$$

①より

$$\begin{aligned} z^2 &= 4\cos^2\theta-4\cos^4\theta \\ &= 4\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) \\ &= 4\cos^2\theta\sin^2\theta \end{aligned}$$

$$z=\pm 2\cos\theta\sin\theta$$

↑解けた。

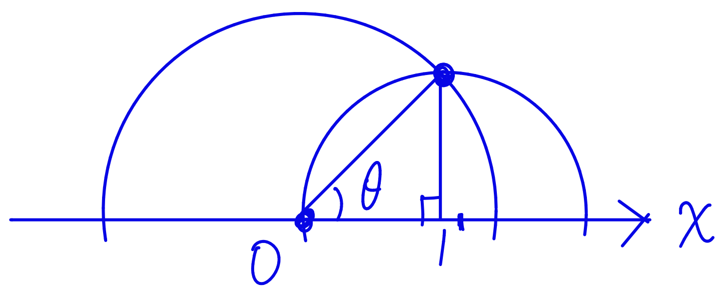
よって

$$S(t)=\int_0^{2\cos^2\theta} 2\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx+\int_{2\cos^2\theta}^{2\cos\theta} 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$=\cdots$ ムズい!!

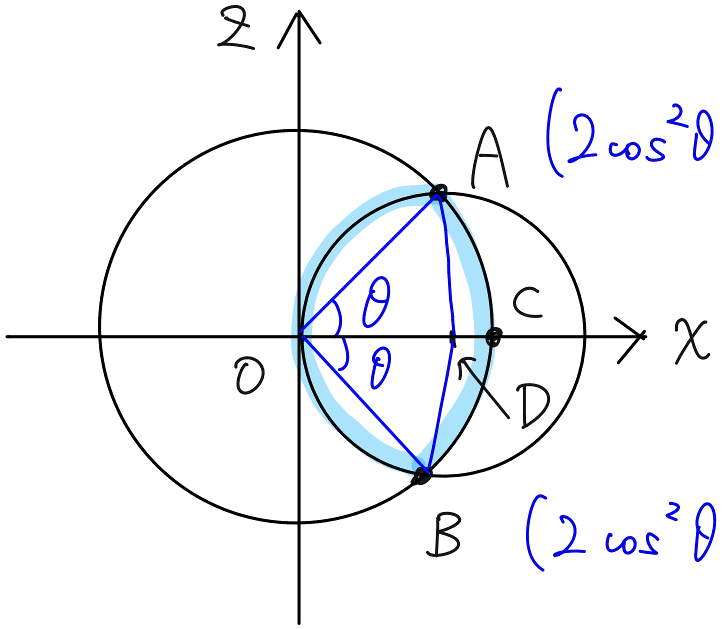
→ 図形的特徴を考える。

結構 x, z がキレイ　$z=\pm x\tan\theta$



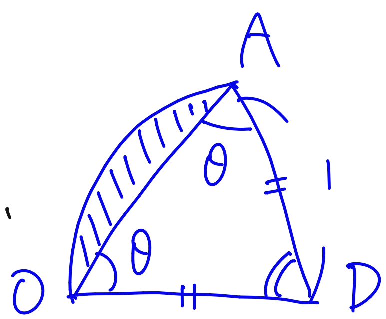
$\frac{\pi}{4} \le \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、$z = \pm x \tan\theta$ より、
下図のように点をおくと、

$\theta = \frac{\pi}{2}$ は ×



$\angle AOC = \angle BOC = \theta$ であることがわかる。 → 扇形 O-ACB は OK.
残りは？

点 $(1, 0)$ を D とおくと、
$\angle ODA = \pi - 2\theta$ なので、
$\angle BDA = 2\pi - 4\theta$.



$$S(t) = \underbrace{\pi(\sqrt{t})^2 \times \frac{2\theta}{2\pi}}_{\text{扇形 O-ACB}} + \left(\underbrace{\pi \cdot 1^2 \times \frac{2\pi - 4\theta}{2\pi}}_{\text{扇形 D-AOB}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin(\pi - 2\theta) \times 2}_{\triangle ODA} \right)$$

$$= \theta t + (\pi - 2\theta) - \sin 2\theta$$

$$= 4\theta\cos^2\theta + \pi - 2\theta - \sin 2\theta$$

$$= 2\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin 2\theta + \pi$$

$$= 2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi$$ となる。

また、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、$t = 0$ であり、
M の切り口は点 $(0, 0)$ となるので
$S(t) = 0$ であり、これは上の式に含まれる。
よって、

$$S(t) = 2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi$$

(2) あとは一直線!
場合分けもないので、あとは
積分あるのみ.
求める体積は.

$$V=\int_0^2 S(t)\,dt$$

ここで、$t=(2\cos\theta)^2$ であり、
$dt=-8\cos\theta\sin\theta\,d\theta$,

t	$0 \to 2$
θ	$\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{4}$

より.

$$V=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)\cdot\underbrace{(-8\cos\theta\sin\theta)}_{-4\sin 2\theta}\,d\theta$$

2倍角にする.
次数下げ

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\underline{\sin 4\theta}-4\sin^2 2\theta+4\pi\sin 2\theta)\,d\theta \quad \cdots ③$$

ここまで! →分けて計算!

ここで、

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\theta\sin 4\theta\,d\theta$$

$$=\left[-\theta\cos 4\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\left[\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\underline{-\frac{3}{4}\pi}$$

半角の公式
次数下げ

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 2\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cancel{4}^{\,2}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{\cancel{2}}\,d\theta$$

$$=\left[2\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$=\underline{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\pi \sin 2\theta \, d\theta = \left[-2\pi \cos 2\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi$$

よって③より、

$$V = -\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

$$= \frac{3}{4}\pi$$ と求められる。