数学Ⅲ特講

過去問

微分・接線④　九州大学 2020 理系第1問

点 $(a, 0)$ を通り、曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

☆先に微分・接線②を見てみて下さい！
なぜ接点をおいて議論するか、しっくり来ると思います。

$y = e^{-x} - e^{-2x}$ の $x=t$ での接線の式は、
$y' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$ より、

$$y = (-e^{-t}+2e^{-2t})(x-t) + (e^{-t}-e^{-2t})$$
$$= (-e^{-t}+2e^{-2t})x - t(-e^{-t}+2e^{-2t}) + (e^{-t}-e^{-2t})$$

これが $(a, 0)$ を通るとき、

$$0 = (-e^{-t}+2e^{-2t})a - t(-e^{-t}+2e^{-2t}) + (e^{-t}-e^{-2t})$$
$$0 = (-1+2e^{-t})a - t(-1+2e^{-t}) + (1-e^{-t}) \quad \cdots ☆$$

となるので、

☆が実数解 t を持つための a の必要十分条件を求めればよい。

☆接線が存在しさえすればよい。

→ 実数解求められないので、グラフの共有点の情報で調べたい。

→ 定数分離しよう。

ここで、$-1+2e^{-t}=0$ とすると、

$$e^{-t} = \frac{1}{2}$$

→ これ以上解かなくても判断可。

これを☆に代入すると、

$0 = 0 - 0 + \frac{1}{2}$ となり不適。

よって $-1+2e^{-2t} \neq 0$ として考えてよい。

★を変形すると、

$$a = t - \frac{1-e^{-t}}{-1+2e^{-t}}$$

→ e^tの方が処理がラク。

スッキリ！

$$= t - \frac{e^t-1}{-e^t+2}$$

→ 分子を軽くすると微分しやすい。(微分・グラフ①)

$$= t - \frac{-(-e^t+2)+1}{-e^t+2}$$

$$= t+1+\frac{1}{e^t-2}$$

→ 定数分離完了！グラフも考えやすい。

となるので、

★が実数解 t を持つ a の条件

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a \\ y = t+1+\dfrac{1}{e^t-2} \end{cases}$$ が共有点を持つ a の条件

と言い換えられる。

$y = t+1+\dfrac{1}{e^t-2}$ のグラフを書く。

$$y' = 1 + \frac{-e^t}{(e^t-2)^2}$$

$$= \frac{e^{2t}-4e^t+4-e^t}{(e^t-2)^2}$$

→ 因数分解！

$$= \frac{e^{2t}-5e^t+4}{(e^t-2)^2} = \frac{(e^t-1)(e^t-4)}{(e^t-2)^2}$$

より、y の増減は

$e^{-t}=\frac{1}{2}$ の解、分母0

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	$\log 4$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
y	↗		↘	/	↘		↗

となる。

$y=a$との共有点を調べるために、何の情報が必要か？ → どこから来てどこへ行くか。

$t=0$ のとき $y=0$

$t=\log 4$ のとき、$y=\log 4+\frac{3}{2}$

さらに、

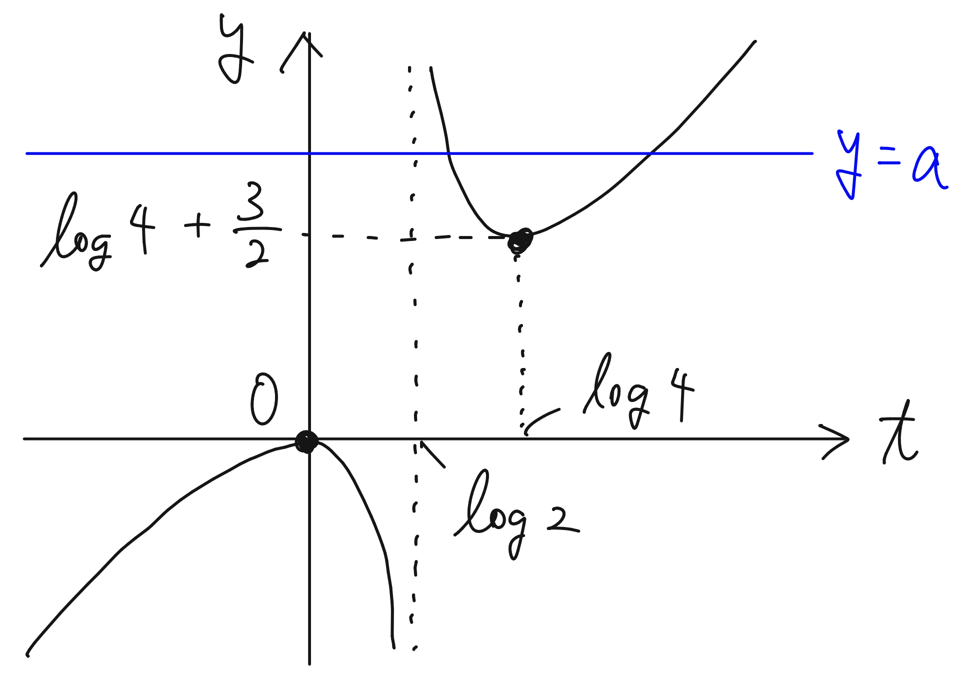
$$\lim_{t\to-\infty}\left(t+1+\frac{1}{e^t-2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{t\to\log 2-0}\left(t+1+\frac{1}{e^t-2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{t\to\log 2+0}\left(t+1+\frac{1}{e^t-2}\right)=\infty$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(t+1+\frac{1}{e^t-2}\right)=\infty$$ となるので

$y=t+1+\frac{1}{e^t-2}$ のグラフは次の通り。



☆実は $y=t+1$, $t+\frac{1}{2}$ が漸近線になる
今回は調査不要。 $(t\to\infty, -\infty)$

よって求めるべき a の条件は、

$a\leq 0$, $\log 4+\frac{3}{2}\leq a$ となる。