複素数平面・図形への応用⑨　大阪大学 2019 理系第2問

数学III特講

過去問

自然数 a, b に対し、$w = \cos\dfrac{a\pi}{3+b} + i\sin\dfrac{a\pi}{3+b}$ とおく。

ただし、i は虚数単位とする。複素数 z_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を以下のように定める。

$$z_1 = 1,\ z_2 = 1 - w,\ z_n = (1-w)z_{n-1} + wz_{n-2}\ (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1) $a = 4, b = 3$ のとき、複素数平面上の点 $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ をこの順に線分で結んでできる図形を図示せよ。

(2) $a = 2, b = 1$ のとき、z_{63} を求めよ。

(3) さいころを 2 回投げ、1 回目に出た目を a、2 回目に出た目を b とする。このとき $z_{63} = 0$ である確率を求めよ。

ポイント

問題文がよくわからないときは、

- ・図やグラフや表で情報を可視化
- ・小さい数などで具体的に実験

の意識を！そこからルールなどをつかんで抽象化させるイメージ。

→今回の問題は小問でこれらを考えるが、自力で考えるクセを！

解説

(1) $a=4,\ b=3$ のとき、

$$w = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi \text{ となる。}$$

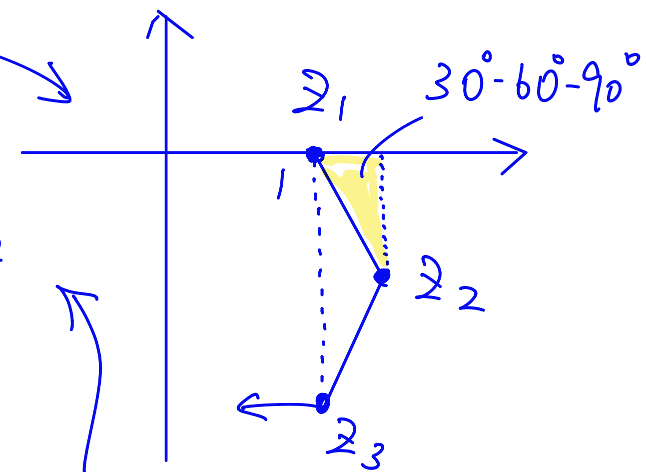
↳これで z_7 まで求められる。

〈実験〉

$w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ より、 ← キレイにしてしまうと？

$$z_2 = 1 - w = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = (1-w)z_2 + wz_1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 - \sqrt{3}i$$



$$z_n = (1-w)z_{n-1} + wz_{n-2}$$

$$\iff z_n - z_{n-1} = w(z_{n-2} - z_{n-1})$$

回転を表すと見れる、と気付く！

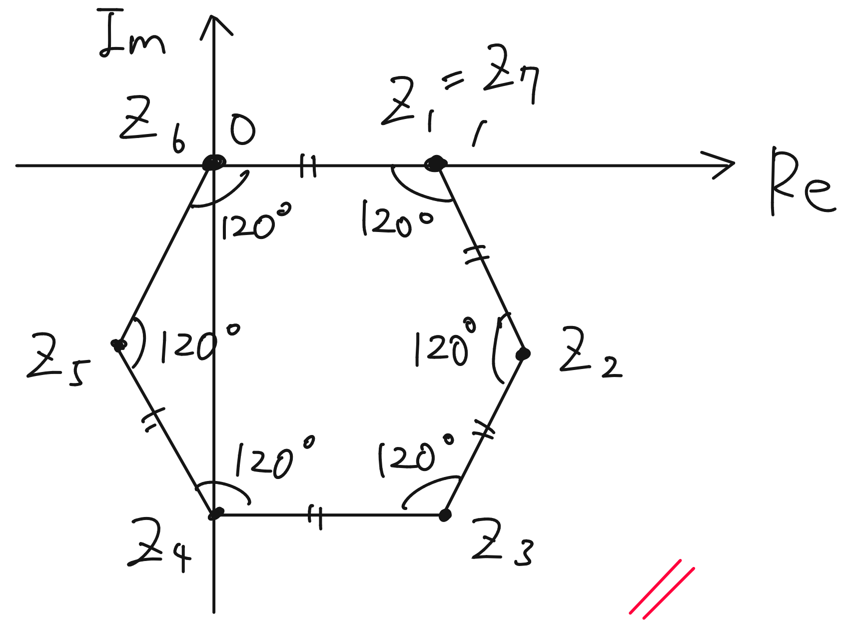
120° ずつ回転??

$$z_2 = 1 - w$$
$$= z_1 - w$$
$$\Leftrightarrow z_2 - z_1 = w(0 - z_1) \quad \cdots ①$$

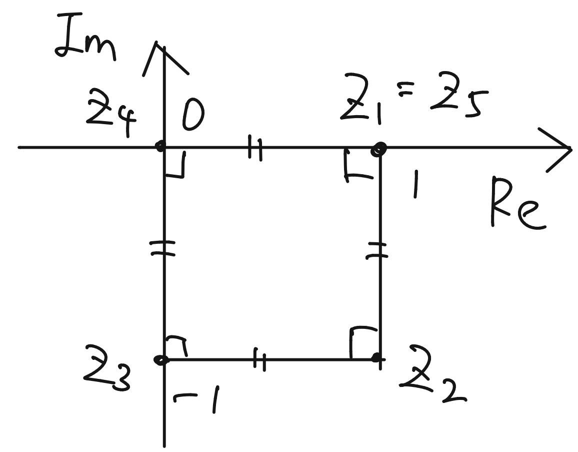
$$z_n = (1-w)z_{n-1} + w z_{n-2}$$
$$\Leftrightarrow z_n - z_{n-1} = w(z_{n-2} - z_{n-1}) \quad \cdots ②$$
$$(n \geqq 3)$$

$z_0 = 0$ とおくと、①②より点 z_n $(n \geqq 2)$ は、点 z_{n-2} を点 z_{n-1} のまわりに $\arg(w)$ 回転させた点となる。($|w|=1$ に留意) ☆

いま w の偏角は $(0 \sim 2\pi)$ の範囲で 以下同.
$\frac{2\pi}{3}$ であることをふまえると、点 $z_1 \sim z_7$ を順に線分で結んだ図は以下の通りとなる。



(2) $a=2,\ b=1$ のとき、
$w = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ となるので
w の偏角は $\frac{\pi}{2}$ である。



このとき左図のように点 z_n $(n \geqq 0)$ は正方形を描いていく。

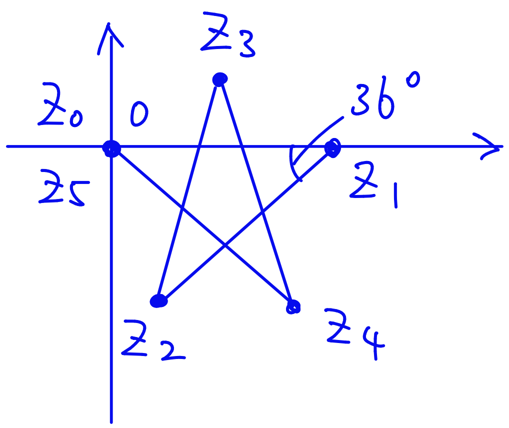
よって z_n の値は n を4で割った余りで分類され、$63 \div 4 = 15 \cdots 3$ より、

$z_{63} = z_3 = -i$ を得る。

(3) $z_{63} = 0$ ← つまり z_0 と重なるのは、正7角形とか正9角形とかを描くとき、というのはわかる。(63の約数)

ただ、正◎角形とならないときに z_{63} と z_0 が重なることは無いと言い切れるか？

ex)



これでも $z_5 = z_0$ となる。

→ この検討が大変。数式の利用を考える。

② について、

$$z_n - z_{n-1} = -w(z_{n-1} - z_{n-2})$$

これは $z_0 = 0$ として $n \geqq 2$ で成り立つ。繰り返し用いれば、

↘ これは解ける。

$$z_n - z_{n-1} = (-w)^{n-1}(z_1 - z_0)$$

$$= (-w)^{n-1}$$ → 階差数列！

これは $n = 1$ でも成り立つ。

よって $z_n = z_0 + \sum_{k=1}^{n} (-w)^{k-1}$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-(-w)^n}{1+w} & (w \neq -1 \text{ のとき}) \\ n & (w = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$ となる。

求まった。

これより，$z_{63}=0$ となるための
必要十分条件は、←式で議論できる．

$$1-(-w)^{63}=0 \quad \text{かつ} \quad w \neq -1$$

$$\Longleftrightarrow \left(\cos\left(\pi+\frac{a\pi}{3+b}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{a\pi}{3+b}\right)\right)^{63}=1$$

点wから原点対称より

$$\text{かつ} \quad \frac{a\pi}{3+b} \neq \pi$$

$$\Longleftrightarrow \frac{63(3+a+b)}{3+b} \text{ が偶数} \quad \text{かつ} \quad a \neq 3+b \quad \cdots ③$$

$$\frac{63(3+a+b)\pi}{3+b}=2k\pi$$

→ ここからは、36通りのしらみつぶしが早そう．
少しは絞りたい．

これを満たす (a, b) の組を考える。
半分に！
③より $3+a+b$ が偶数，つまり $a+b$ が奇数
であることを踏まえると，

b を固定すると早い（登場回数が多い）

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	/	×	/	○	/	○
2	×	/	○	/	×	/
3	/	×	/	○	/	○
4	×	/	×	/	×	/
5	/	×	/	○	/	○
6	×	/	×	/	×	/

$\dfrac{63(4+a)}{4}$ として代入

$a \neq 3+b$ より

$4+a$ は8の倍数になるか？

(a, b) は7組あり，求める確率は $\underline{\underline{\dfrac{7}{36}}}$．