九州大学 2023 文系第3問

点 O を原点とする座標平面上の $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{m}=(a,\ c)$, $\overrightarrow{n}=(b,\ d)$ に対して、$D=ad-bc$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{m}$ と $\overrightarrow{n}$ が平行であるための必要十分条件は $D=0$ であることを示せ。

以下、$D\neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ で $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}=1,\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=0$ を満たすものを求めよ。

(3) 座標平面上のベクトル $\overrightarrow{q}$ に対して $r\overrightarrow{m}+s\overrightarrow{n}=\overrightarrow{q}$ を満たす実数 r と s を $\overrightarrow{q}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ を用いて表せ。

(1) 「必要十分条件」の示し方

→ ① 「⇒」「⇐」をそれぞれ示していく
② 同値性を保ったまま示していく

→ ②がいけるなら、書く量が少なくてラク

今回は…

$\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行 ($\vec{m} \neq \vec{0}$, $\vec{n} \neq \vec{0}$)

$\Updownarrow$

$\vec{m} = k\vec{n}$ となる実数 k が存在

→ これで式で進めていって $D=0$ が示せそうなので②でいく

$\vec{m} \neq \vec{0}$, $\vec{n} \neq \vec{0}$ より、$\vec{m}$, $\vec{n}$ が平行であるための必要十分条件は、

$\vec{m} = k\vec{n}$ を満たす実数 k が存在すること

である。

$\vec{m} = k\vec{n}$ ↷ 成分表記

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = kb & \cdots ① \\ c = kd & \cdots ② \end{cases}$$

↓ k を消してみようとする

(i) $b \neq 0$ のとき

①より $k = \dfrac{a}{b}$

②に代入して $c = \dfrac{a}{b} \cdot d$

$\Leftrightarrow bc = ad$

$\Leftrightarrow D = 0$

よって $D=0$ のとき、$k = \dfrac{a}{b}$ で定めれば ①②を満たす k も存在し、$D \neq 0$ のとき、そのような k は存在しないので、

$D = 0 \Leftrightarrow$ ①②を満たす k が存在

である。

(ii) $b=0$ のとき

$\vec{n}\neq\vec{0}$ より $d\neq 0$ → 0だと $(0,0)$ になる

②より $k=\dfrac{c}{d}$

①に代入して $a=\dfrac{c}{d}\cdot b$

$\iff ad=bc$

$\iff D=0$

(a=0から進めるとダルし面倒)

よって(i)と同様に、

$D=0 \iff$ ①②を満たす k が存在.

以上(i)(ii)より、題意は示された。

※成分に0があるので答案としては微妙なところだけど、

$\vec{m}\parallel\vec{n}$ → $a:c=b:d$ で、$D=0$ の感じ

(2) $\vec{v}$ と $\vec{w}$ を成分でおいて(4変数)

式4つでゴリゴリやってもいいが、メンドい

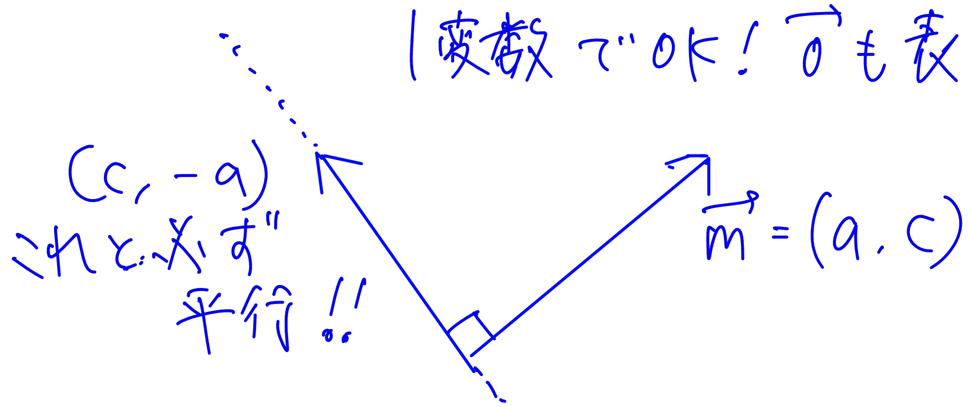
垂直条件をうまく使う。

$\vec{m}=(a,c)$ に垂直なベクトルの1つとして

$(c,-a)$ があるので、$\vec{m}\cdot\vec{w}=0$ より

$\vec{w}=l(c,-a)$ (l は実数) と表せる。

1変数でOK! $\vec{0}$ も表せる。



同様に $\vec{n}=(b,d)$ に対して

$\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ より $\vec{v}=l'(d,-b)$ (l' は実数)

と表せる。 → 2変数に対してあと2式で解ける!

ここで、$\vec{m}\cdot\vec{v}=1$ より

$\ell'(ad-bc)=1$

$D=ad-bc\neq 0$ より

$$\ell'=\frac{1}{ad-bc}$$

同様に $\vec{n}\cdot\vec{w}=1$ より

$\ell(bc-ad)=1$

$bc-ad=-D\neq 0$ より

$$\ell=\frac{1}{bc-ad}$$

よって、$\vec{w}=\dfrac{1}{bc-ad}(c,-a)$

$\vec{v}=\dfrac{1}{ad-bc}(d,-b)$ となる。

(3) どうやって(2)の誘導に乗るか…？
とりあえず内積とりたくなる。

$r\vec{m}+s\vec{n}=\vec{q}$ ← ここに、$\vec{w}$, $\vec{v}$との内積をとって(2)の形を作る

両辺と$\vec{w}$の内積をとると、

$$r\underbrace{\vec{m}\cdot\vec{w}}_{0}+s\underbrace{\vec{n}\cdot\vec{w}}_{1}=\vec{q}\cdot\vec{w}$$

← (2)より!!

(2)より $s=\vec{q}\cdot\vec{w}$ となる。

同様に$\vec{v}$との内積をとると、

$$r\underbrace{\vec{m}\cdot\vec{v}}_{1}+s\underbrace{\vec{n}\cdot\vec{v}}_{0}=\vec{q}\cdot\vec{v}$$

← (2)より!!

(2)より $r=\vec{q}\cdot\vec{v}$ となる。