

九州大学 2017 理系第3問

初項 $a_1 = 1$ 、公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち、7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち、 7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

★ 答案が書きにくい問題ではあるものの、方針に迷うところは1つなく、教えられるべき問題です。

本番ではこういう問題を焦らず正確にとれるように過去問で鍛えましょう。

<頭の中>

とりあえず具体化して、状況を考える。

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, ...
6項目 13項目

以後 7項ごと に7の倍数が出てくる。

公差が4だからそりゃそうか。あとは数える
(一般項を求めて $4n-1=7k$ などと式でいっても、やっていることは同様)

(1) 初めて7の倍数となるのは、
 $a_6 = 21$ であり、公差4なので、以降7項ごとに7の倍数が現れる。

$$\begin{aligned} \text{「項目」} \rightarrow \textcircled{6} &= 7 \times \underline{0} + 6 \\ +7 \downarrow & 13 = 7 \times \underline{1} + 6 \\ +7 \downarrow & \vdots \end{aligned}$$

$$594 = 7 \times \underline{84} + 6 \quad \leftarrow (600-6) \div 7 \text{ であたりを付ける!!}$$

ラストは a_{594} となるので、
7の倍数である項は 85 コ

※ ここでは「項目」で数えたが、ラスト
「項の値」で考えてもOK. $a_{600} = 2397$

	a_6	a_{13}	...	a_{594}
値	21	49	...	2373
	$7 \times \underline{3}$	$7 \times \underline{7}$		$7 \times \underline{339}$
	$4 \times \underline{1} - 1$	$4 \times \underline{2} - 1$		$4 \times \underline{85} - 1$

(2) 初めて 49 の倍数となるのは、
 $a_{13} = 49$ であり、公差 4 なので、以降
 49 項ごとに 49 の倍数が現れる。

「項目」→ $(13) = 49 \times 0 + 13$
 $+49 \downarrow$
 $62 = 49 \times 1 + 13$
 $+49 \downarrow$

$\vdots$
 $552 = 49 \times 11 + 13 \leftarrow (600 - 13) \div 49$
 であたりを
 付ける!!

ラストは a_{552} となるので、

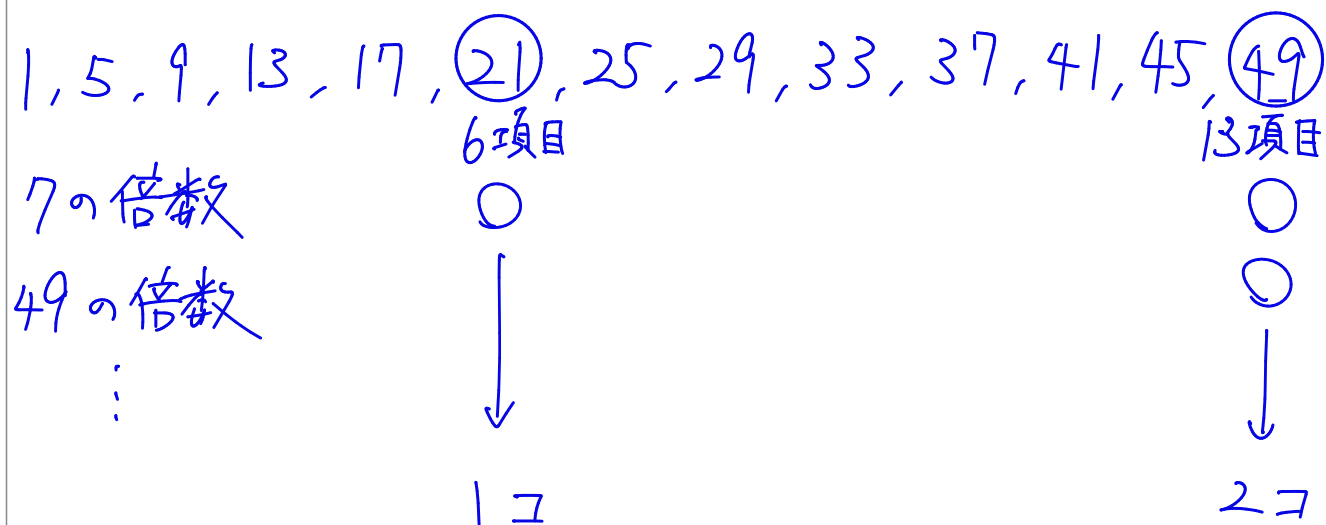
49 の倍数である項は 12 コ

※ これも「項の値」で解いても OK.

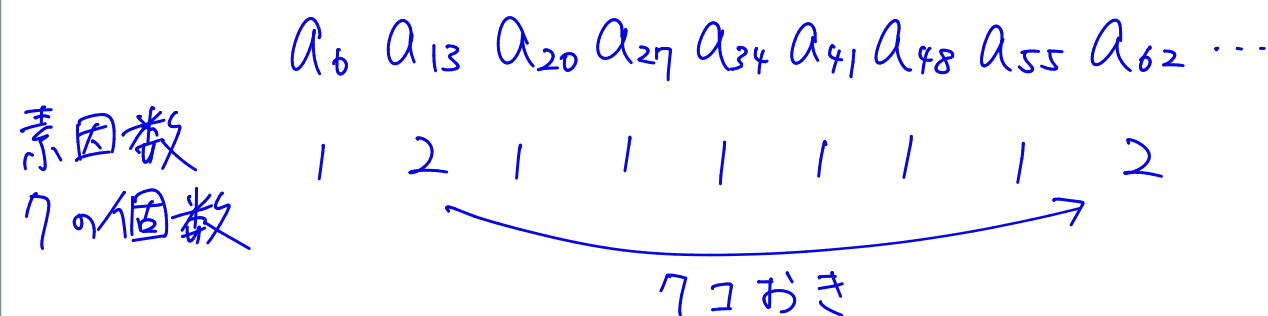
$a_{13} \quad a_{62} \quad \dots$
 値 $49 \quad 245 \quad \dots$
 $49 \times 1 \quad 49 \times 5$
 $4 \times 1 - 3 \quad 4 \times 2 - 3$

a_{552}
 2205
 49×45
 $4 \times 12 - 3$

(3) 「10! は 2 で何回割り切れるか
 問題と同じだ」と気付けるかどうか!



つまり...



→ ☆ { どこまで足せば 45 コになるか?
 3 コ以上も 7 項はないのか? }

まず、 $7^3 = 343$ の倍数である項のうち、
最小のものを調べる。

a_n の一般項は $4n-3$ であり、

$$\begin{array}{l} 4n-3 = 343 \rightarrow \times \\ 4n-3 = 686 \rightarrow \times \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{自然数のは} \\ \text{存在しない} \end{array}$$

$$4n-3 = 1029 \rightarrow \underline{n = 258}$$

より、最小の項は $a_{258} = 1029$ である。

→ とりあえずここまでで 7 の個数を
調べてみよう。

a_1 から a_{258} までの項の中で、

・ 7 の倍数は (1) と同様に考えて

$$\begin{array}{l} \text{「項目」} \rightarrow 6 = 7 \times \underline{0} + 6 \\ 13 = 7 \times \underline{1} + 6 \\ \vdots \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \underline{37 \text{ コ}}$$

$$258 = 7 \times \underline{36} + 6 \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{これがラストである} \\ \text{ことはわかってる} \end{array}$$

・ 49 の倍数も (2) と同様に考えて

$$\begin{array}{l} \text{「項目」} \rightarrow \underline{13} = 49 \times \underline{0} + 13 \\ 62 = 49 \times \underline{1} + 13 \\ \vdots \\ 258 = 49 \times \underline{5} + 13 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underline{6 \text{ コ}} \\ \text{これがラストである} \\ \text{ことはわかってる} \end{array}$$

・ 343 の倍数は 1 コ

・ $a_{258} = 1029 < 7^4$ より、 7^4 の倍数は
ない ← これ記述で忘れないように!!
ということは $7^5, 7^6, \dots$ の倍数もない。

よって、積 $a_1 a_2 \dots a_{258}$ は素因数 7 を

$$\underline{37 + 6 + 1 = 44 \text{ コ}} \text{ 持つ。}$$

この求め方は
大丈夫?

おいしい!!

次の 7 の倍数を入れれば OK.

次の 7 の倍数の項は a_{265} なので、
求める n は 265 である。