九州大学 2017 理系第3問

初項 $a_1 = 1$、公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち、7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち、7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

☆答案が書きにくい問題ではあるものの、
方針に迷うところは少なく、数え上げればいける問題です。
本番ではこういう問題を焦らず正確にとれるように過去問で鍛えましょう。

＜頭の中＞

とりあえず具体化して、状況を考える。

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, …

(21：6項目、49：13項目)

以後7項ごとに7の倍数が出てくる。
公差が4だからそりゃそうか。あとは数える
(一般項を求めて $4n-1=7k$ などと式でいっても、やっていることは同様)

(1) 初めて7の倍数となるのは、
$a_6=21$ であり、公差4なので、以降7項ごとに7の倍数が現れる。

「項目」→ $6 = 7\times\underline{0}+6$

$\xrightarrow{+7}$ $13 = 7\times\underline{1}+6$

$\xrightarrow{+7}$ ⋮

$594 = 7\times\underline{84}+6$ ← $(600-6)\div 7$ であたりを付ける!!

ラストは a_{594} となるので、
7の倍数である項は85コ

※ここでは「項目」で数えたが、
「項の値」で考えてもOK. $a_{600}=2397$ ←ラスト

	a_6	a_{13}		a_{594}
値	21	49	‥‥	2373
	$7\times\underline{3}$	$7\times\underline{7}$		$7\times\underline{339}$
	$4\times 1-1$	$4\times 2-1$		$4\times 85-1$

(2) 初めて 49 の倍数となるのは、
$a_{13}=49$ であり、公差 4 なので、以降
49 項ごとに 49 の倍数が現れる。

「項目」→ 13 $= 49\times\underline{0}+13$
+49 62 $= 49\times\underline{1}+13$
+49
⋮
$552 = 49\times\underline{11}+13$ ← $(600-13)\div 49$ であたりを付ける!!

ラストは a_{552} となるので、
49 の倍数である項は 12 コ

※これも「項の値」で解いても OK.

	a_{13}	a_{62}	⋯	a_{552}
値	49	245	⋯	2205
	$49\times\underline{1}$	$49\times\underline{5}$		$49\times\underline{45}$
	$4\times 1-3$	$4\times 2-3$		$4\times 12-3$

(3) 「10! は 2 で何回割り切れるか
問題と同じだと気付けるかどうか!

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49

	6項目 (21)	13項目 (49)
7の倍数	○	○
49の倍数		○
⋮	1コ	2コ

つまり⋯

	a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}	a_{55}	a_{62}	⋯
素因数7の個数	1	2	1	1	1	1	1	1	2	

7コおき

→ ☆ { どこまで足せば 45コになるか?
3コ以上もつ項はないのか?

まず、$7^3 = 343$ の倍数である項のうち、
最小のものを調べる。

a_n の一般項は $4n-3$ であり、

$4n-3=343 \to \times$

$4n-3=686 \to \times$

自然数nは存在しない

$4n-3=1029 \to n=258$

より、最小の項は $a_{258}=1029$ である。

→とりあえずここまでで7の個数を調べてみよう。

a_1 から a_{258} までの項の中で、

・7の倍数は(1)と同様に考えて

「項目」→ $6 = 7\times 0 + 6$

$13 = 7 \times 1 + 6$

⋮

$258 = 7 \times 36 + 6$

これがラストであることはわかってる

37コ

・49の倍数も(2)と同様に考えて

「項目」→ $13 = 49 \times 0 + 13$

$62 = 49 \times 1 + 13$

⋮

$258 = 49 \times 5 + 13$

これがラストであることはわかってる

6コ

・343の倍数は 1コ

・$a_{258}=1029 < 7^4$ より、7^4 の倍数はない

← これ記述で忘れないように!!

ということは 7^5, 7^6, … の倍数もない。

よって、積 $a_1 a_2 \cdots a_{258}$ は素因数7を

$37+6+1 = 44$ コ 持つ。

この求め方は大丈夫?

おしい!! 次の7の倍数を入れればOK.

次の7の倍数の項は a_{265} なので、

求めるnは 265 である。