北海道大学 2022 理系第5問

複素数 z に関する次の 2 つの方程式を考える。ただし、$\bar{z}$ を z と共役な複素数とし、i を虚数単位とする。

$z\bar{z} = 4 \quad \cdots①$ $\qquad |z| = |z - \sqrt{3} + i| \quad \cdots②$

(1) ①、② それぞれの方程式について、その解 z 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) ①、② の共通解となる複素数をすべて求めよ。

(3) (2) で求めたすべての複素数の積を ω とおく。このとき、ω^n が負の実数となるための整数 n の必要十分条件を求めよ。

(1) 解 z の描く図形

$|z-\alpha|$ は点 z と点 α のキョリを表す！

→ 数学Ⅲ特講

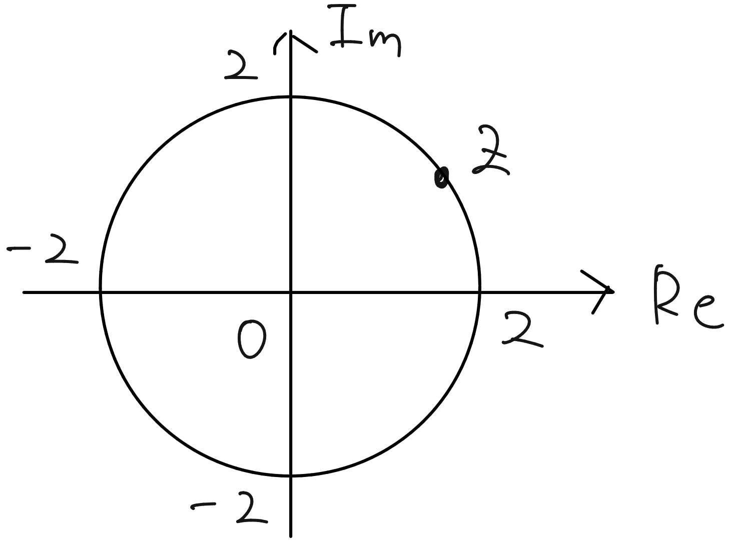
複素数平面・図形への応用②

①について

$z\bar{z}=4 \iff |z|^2=4$

$\iff |z|=2$ より、

解 z 全体が表す図形は原点中心、半径 2 の円である。(これを C とする)



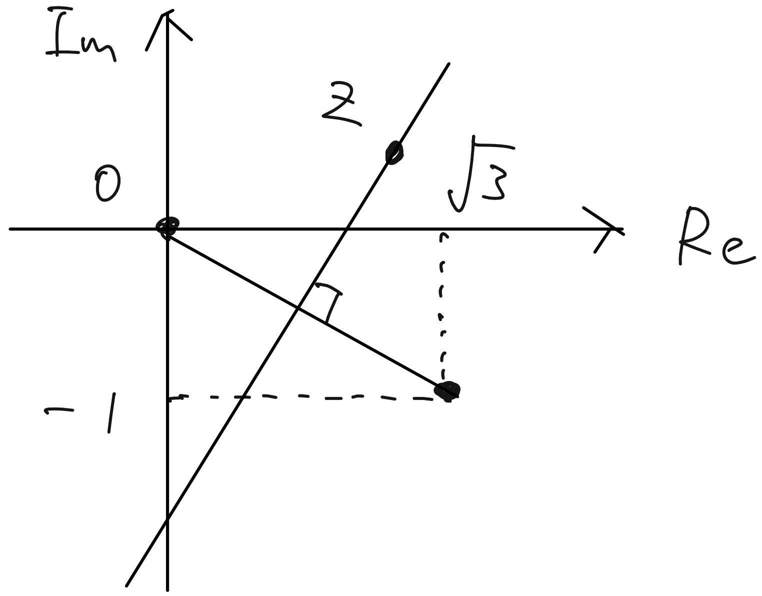
//

②について、

$|z|=|z-\sqrt{3}+i|$

$\iff |z|=|z-(\sqrt{3}-i)|$ より、

解 z 全体が表す図形は点 0 と点 $\sqrt{3}-i$ を結んだ線分の垂直二等分線である。(これを l とする)



//

(2) 複素数平面のアプローチ

→ 式でいくのか、図形でいくのか.

↓ 複素数のままいくのか. $a+bi$ など

と具体的において実数で考えるか.

→ ・幾何 ・ベクトル ・座標

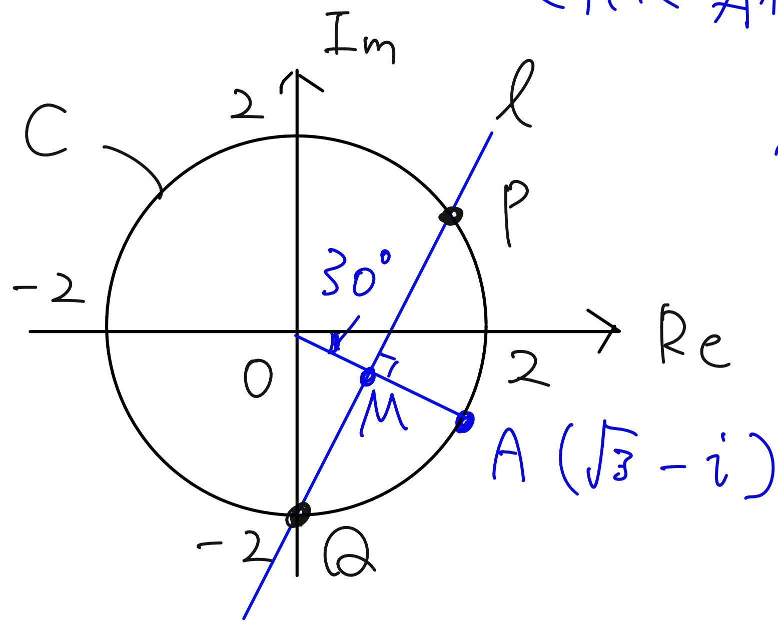
☆ 数学Ⅲ特講
複素数平面・式の処理 ②⑤

今回は(1)の誘導もあるし、図形で考えたくなるし、図形で考えられるとラクなことも多い.

考え方① 幾何的に

$|\sqrt{3}-i|=2$ より、複素数平面上で、
点 $\sqrt{3}-i$ は円C上にある。このとき、

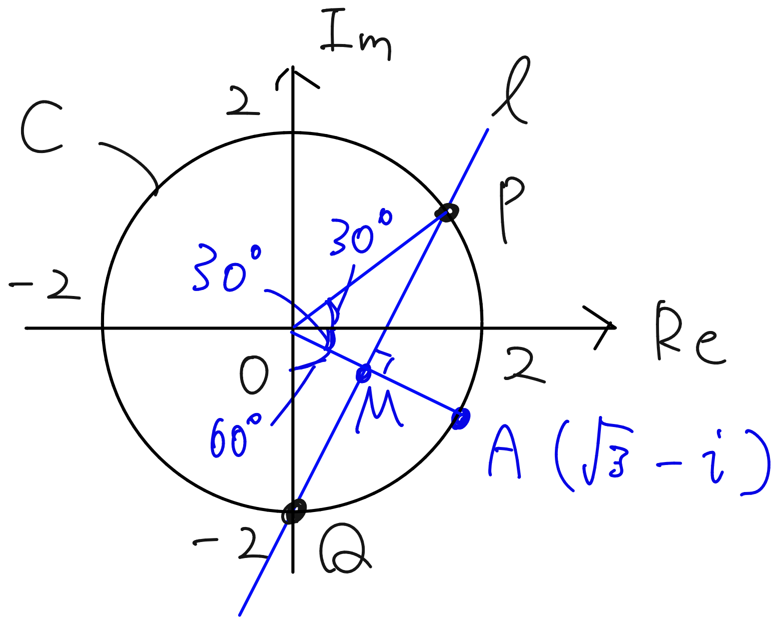
これに気付けたらラク!



P, Qの複素数を求めたい!

上図のように、Cとℓは2点で交わり、
点 $\sqrt{3}-i$ をA、OAの中点をM、
Cとℓの交点をP, Qとする。

ここで、$OP=OQ=2$, $OM=1$ より、
$\angle POM=\angle QOM=60°$ となる。



よって、P, Q が表す複素数は

$2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \underline{\sqrt{3}+i}$

$2(\cos(-90^\circ) + i\sin(-90^\circ)) = \underline{-2i}$

と求められる。

考え方② 座標平面で

①が思いつかなくても大丈夫!

ただの円と直線の交点

Cやlをxy平面で考えると、

$$\begin{cases} C: x^2+y^2=4 \\ \ell: y+\dfrac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

← $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ を通り傾きが $\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 2$

なので、これらの交点を求めると、

$x^2 + (\sqrt{3}x-2)^2 = 4$

$4x^2 - 4\sqrt{3}x = 0$

$x(x-\sqrt{3}) = 0$

$x = 0, \sqrt{3}$ より、

交点は $(x, y) = (0, -2)(\sqrt{3}, 1)$

☆ yを求めるときには $y=\sqrt{3}x-2$ に代入!!

(良問1A2B 10/100)

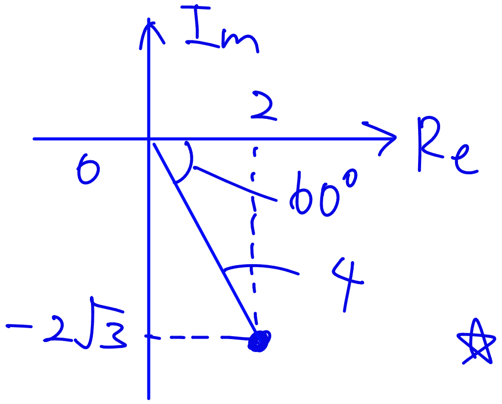
よって求める複素数は

$-2i$, $\sqrt{3}+i$ となる。

(3) $w = -2i(\sqrt{3}+i)$

$= 2-2\sqrt{3}\,i$

$= 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ より、



複素数のn乗は
極形式で!

☆ 数学Ⅲ特講
複素数平面・式の処理③

$$w^n = 4^n\left(\cos\left(-\frac{n}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{n}{3}\pi\right)\right)$$

→ 負の実数になるのは…?

$4^n>0$ より、w^n が負の実数となるための n の必要十分条件は、

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{n}{3}\pi\right)<0 & \cdots ① \\ \sin\left(-\frac{n}{3}\pi\right)=0 & \cdots ②\end{cases}$$

← 実部が負

← 虚部が0

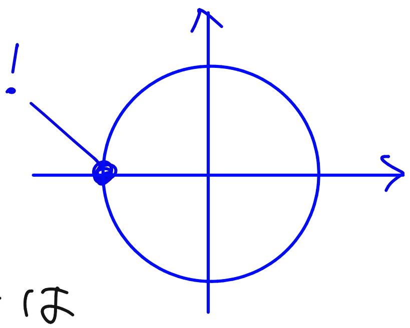
である。

↑ 立式!ギロンできる形になった

具体化 →

ここだけ!

$-\pi, \pi, 3\pi$ ...



①②を満たす n の条件は

$-\frac{n}{3}\pi = k\pi$ (kは奇数) と

表せること。つまり、ある奇数 k を用いて

$n=-3k$ と表せることである。

※ $n=3k$ でもOK.