

(1) α, β の1つなかつとも一方が 奇

→ 3パターンある.

→ 「そうじゃないケース」は1パターン
(どちらも 偶)

→ 対偶の証明も視野に入れるが.

うまくいかなさそう。3パターンで場合分け

(i) α が奇数, β が奇数のとき.

$\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2$ は全て奇数となるので,

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ は奇数.

(ii) α が奇数, β が偶数のとき.

α^2 が奇数, $\alpha\beta$ と β^2 が偶数となるので,

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ は奇数.

(iii) α が偶数, β が奇数のとき.

$\alpha^2, \alpha\beta$ が偶数, β^2 が奇数となるので,

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ は奇数.

以上 (i) - (iii) より, α, β の1つなかつとも一方が

奇数のとき, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ は奇数である。 

(2) どうやって (1) を活かすか.

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2n \text{ 偶数!}$$

→ (1) の結論の 否定

→ 対偶命題が使えそう!

(1) で示した命題の 対偶 をとると.

「 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ が偶数 $\Rightarrow \alpha, \beta$ は偶数」

よって, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2n \dots \textcircled{1}$ と表せるとき.

α, β は偶数である.

→ とりあえず数式にしてみる.

$\alpha = 2k, \beta = 2l$ (k, l は整数) とおくと.

①は

$$4(k^2 + kl + l^2) = 2n$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2(k^2 + kl + l^2)}_{\textcircled{7}} = \underbrace{2n}_{\textcircled{8}} \text{ となるが.}$$

n は奇数より, (左辺) が偶数, (右辺) が奇数

となって, これを満たす k, l は存在しない。

よって, ①を満たす α, β は存在しない。 

(3) とうやうて (2) を活かすか.

見出すのが 難しい...!

$$(2) \rightarrow \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2n \quad (n: \text{奇数})$$

この形を作りたい!

$$\underline{x^3 - 2018x + c = 0} \quad \text{とにらめっこすると.}$$

① この左辺を直接 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ の形にするのはムリ

② $2018 = 2 \times 1009 \rightarrow$ これが $2n$ に相当しそう!

↓

解と係数の関係式を立ててみる.

$x^3 - 2018x + c = 0$ の3解を α, β, γ とおく.

★ 必ず3解ある. (複素数の範囲で)

実数解じゃなくても 解と係数の関係は成り立つ。

解と係数の関係より.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2018 \quad \dots \textcircled{3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta\gamma = -c \quad \dots \textcircled{4} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} \text{ より } \gamma = -(\alpha + \beta)$$

これを $\textcircled{3}$ に代入して.

$$\alpha\beta - \beta(\alpha + \beta) - \alpha(\alpha + \beta) = -2018$$

$$\Leftrightarrow \underline{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 2018 = 2 \times 1009}$$

(2) より, これを満たす α, β は整数ではない。

よって, α, β, γ のうち, 整数は1個以下であり, 題意は示された。▢

※ 必要条件でキロンしてOK.