大阪大学 2021 理系第4問

整数 a, b, c に関する次の条件 $(*)$ を考える。

$$\int_a^c (x^2 + bx)dx = \int_b^c (x^2 + ax)dx \quad \cdots\cdots (*)$$

(1) 整数 a, b, c が $(*)$ および $a \neq b$ を満たすとき、c は 3 の倍数であることを示せ。

(2) $c = 3600$ のとき、$(*)$ および $a < b$ を満たす整数の組 (a, b) の個数を求めよ。

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots (*)$$

→ 計算せず、図形的に考察できるか？
ムズかしかった。(前回の初見動画を参照)
→ とりあえず計算

(1)

$(*)$ の左辺 $= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}bx^2\right]_a^c$

$$= \frac{1}{3}(c^3-a^3) + \frac{1}{2}b(c^2-a^2)$$

$(*)$ の右辺 $= \frac{1}{3}(c^3-b^3) + \frac{1}{2}a(c^2-b^2)$

☆左辺の a を b に、b を a に
変えて、処理の時短

となるので、

$$\frac{1}{3}(\cancel{c^3}-a^3) + \frac{1}{2}b(c^2-a^2) = \frac{1}{3}(\cancel{c^3}-b^3) + \frac{1}{2}a(c^2-b^2)$$

$$2(a^3-b^3) + 3c^2(a-b) + 3ab(a-b) = 0$$

$$(a-b)\left(\underline{2(a^2+ab+b^2)+3c^2+3ab}\right) = 0$$

展開するかの試行錯誤は
前回の初見動画で。

→ $2a^2+5ab+2b^2+3c^2$

$a \neq b$ より、

$$\underbrace{2a^2+5ab+2b^2}_{②} + \overset{3\text{の倍数}}{3c^2} = 0 \quad \cdots ① \text{ を得る。}$$

これが $(*)$ と同値。

どうやって c：3の倍数を示すか？
c^2 が3の倍数になってくれるといい
(c^2 が3の倍数 $\Leftrightarrow$ c が3の倍数)
→ $2a^2+5ab+2b^2$ が9の倍数であることを示す作戦。

そもそも、$2a^2+5ab+2b^2$ は3の倍数であることが必要。考え方 $\boxed{1}$ としては
a と b を3で割った余りで場合分けして、
② が3の倍数となる組について、
9の倍数にもなることを示す。

ただ、9通りあるのでメンドくさい。
(本番は、これくらいの気合いは大事。
前回はこれで解いてます)
→ ここでは少しうまい方法を。

整数問題の絞り込み方
① 余りによる分類
② 不等式による評価
③ 積の形に整理

$② = (2a+b)(a+2b)$ であり、
「余りによる場合分け」ではなく
「積の形」にできることに着目。

①よりこれは3の倍数なので、$2a+b$ 又は
$a+2b$ は3の倍数。さらに、

$$(2a+b)+(a+2b)=3a+3b$$
$$=3(a+b)$$

より足して3の倍数となるので、
$2a+b$ も $a+2b$ も3の倍数となる。

このとき、$(2a+b)(a+2b)$ は9の倍数。

よって①より c^2 は3の倍数となり、c は3の倍数であることが示される。$\blacksquare$

※ ラストは時間があれば万全を期して証明しよう.

$c = 3k \pm 1 \ (k \in \mathbb{Z})$ のとき

$c^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$

$= 3(3k^2 \pm 2) + 1$ となるので、

「c が3の倍数でない ⇒ c^2 は3の倍数でない」

が成り立つ。よって対偶である

「c^2 が3の倍数 ⇒ c は3の倍数」

は示される。

(2) ①より

$(2a+b)(a+2b) = -3c^2 \cdots ③$

↑

積の形に整理したくなる ← 大きい数なので、素因数分解しかない

$c = 3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ より.

③は

$(2a+b)(a+2b) = -2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdots ④$

となる。 ↙割り振る

ここから、$(2a+b, a+2b)$ の組を考えたいが、整数 (a, b) の組の数と一致するのか？

まずは条件を満たす $(2a+b, a+2b)$ の組から考える。条件は、④と $a, b \in \mathbb{Z}$ と $a < b$

まずはこれを満たすか.

$a < b \iff 2a+b < a+2b$ であり、

④より $2a+b$ と $a+2b$ は異符号なので、

$2a+b < 0$ かつ $a+2b > 0$ である.

→ これで $a < b$ は満たされる！次に、

④で素因数を割り振ったときに、

$a, b \in \mathbb{Z}$ が存在するか？

実験すると、

$$\begin{cases} 2a+b = -2^8 \\ a+2b = 3^5 \cdot 5^4 \end{cases}$$ とすると、

両辺足して $3(a+b) = (3の倍数でない数)$

よって不適

→ 足して3の倍数となることが必要。

→ 必ずどっちかは3の倍数となるので どっちも3の倍数ということ

$(2a+b)+(a+2b) = 3(a+b)$ となり、

足すと3の倍数となる。よって④より

$2a+b$ と $a+2b$ はどちらも

3の倍数となることが必要。

→ 3は1コ以上ずつ割り振られる

逆に、$2a+b$ と $a+2b$ がどちらも

3の倍数であるとき、

$a+b$ は整数になり、

$$\begin{cases} (2a+b)-(a+b) = a \\ (a+2b)-(a+b) = b \end{cases}$$ ⑤ はどちらも整数

となるので、整数の組 (a, b) は

存在する。↑

条件を満たす $(2a+b, a+2b)$ の組は

これで求められる。が…

また、$(2a+b, a+2b)$ と (a, b) が

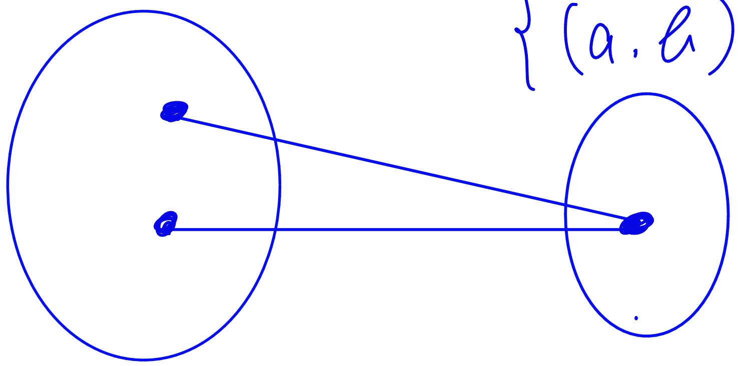
1対1対応であるかわからない。

違う $(2a+b, a+2b)$ の組から同じ (a, b)

が出てきたら、組の数が異なってくる!!

$\{(2a+b,\ a+2b)\}$

$\{(a, b)\}$



がありうる？

さらに、⑤の2式より、異なる$(2a+b, a+2b)$から同じ(a, b)の組が出てくることはない。

よって、④かつ

- $2a+b<0$ かつ $a+2b>0$
- どちらも3の倍数

を満たす$(2a+b, a+2b)$の組の数と求める(a, b)の組の数は一致する。

④において、素因数2の分配が9通り（$(0, 8)$から$(8, 0)$までOK）、素因数3が4通り（$(1, 4)$〜$(4, 1)$）、素因数5が5通りあるので、求める組の数は

$$9\times 4\times 5=180\text{コ}$$

となる。