東北大学 2023 理系第2問

関数 $f(x) = \sin 3x + \sin x$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち、最小のものを求めよ。

(2) 正の整数 m に対して、$f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち、m 以下のものの個数を $p(m)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{p(m)}{m}$ を求めよ。

(1) $\sin 3x + \sin x = 0$

├ 方程式は積に弱いので和積 ①

└ 中身が違うので3倍角 ②

〈考え方①〉

$$\sin \underbrace{3x}_{2x+x} + \sin \underbrace{x}_{2x-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x = 0$$

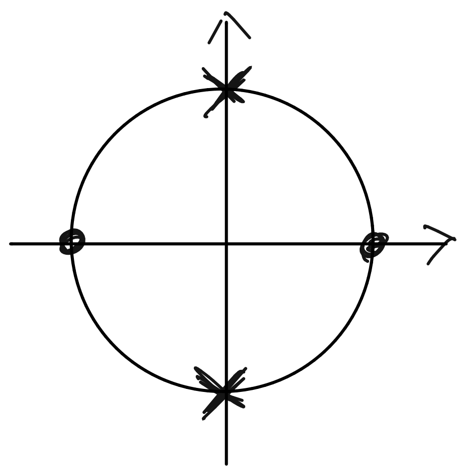
$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ 又は } \cos x = 0 \quad \cdots ①$$

$x>0$ のもとで、

$$\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi$$

(kは任意の自然数)



$$\Leftrightarrow x = \frac{k}{2}\pi$$

$$\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + l\pi$$

(lは任意の自然数)

└ よく考えると、$x = \frac{k}{2}\pi$ に全て含まれる!

よって、

① $\Leftrightarrow$ $x = \frac{k}{2}\pi$ (kは任意の自然数)

$\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \cdots$

これで全て網羅!解がわかった

となるので、最小のものは $\frac{\pi}{2}$ である。

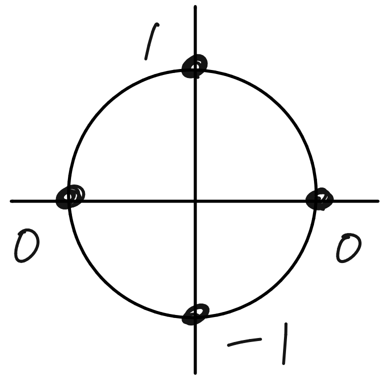
〈考え方②〉

$$\underbrace{\sin 3x}_{3倍角} + \sin x = 0$$

$$4\sin x - 4\sin^3 x = 0$$

$$\sin x(1+\sin x)(1-\sin x) = 0$$

$$\sin x = 0, -1, 1$$



$$\underbrace{x = \frac{k}{2}\pi}_{で同様}$$

(2) 極限値の求め方

→ { $p(m)$ が求められるなら直接計算

$p(m)$ が求められなければ不等式評価してはさみうちの原理

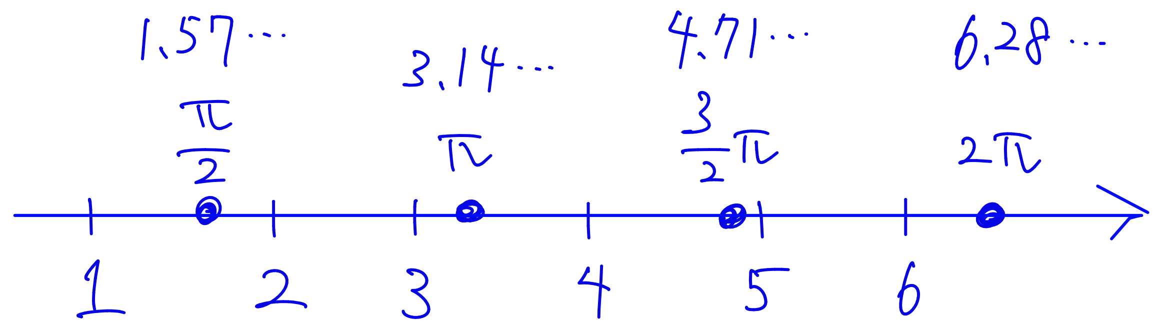
まずは具体的に実験して $p(m)$ の内容を把握!! 日本語で考えるのも大事.

$m=1 \to p(1)$: 1以下の実数解の個数

$m=2 \to p(2)$: 2 〃

⋮

$$x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \cdots$$



$$\longrightarrow p(1) = 0,\ p(2) = 1,\ \cdots$$

直接求められるか？

$\frac{k}{2}\pi$ の形で、m以下で最大のものを考えれば
個数わかる → 不等式で評価するしかないか

ある自然数 m に対して、

$$\frac{n}{2}\pi \leqq m < \frac{n+1}{2}\pi$$ を満たす

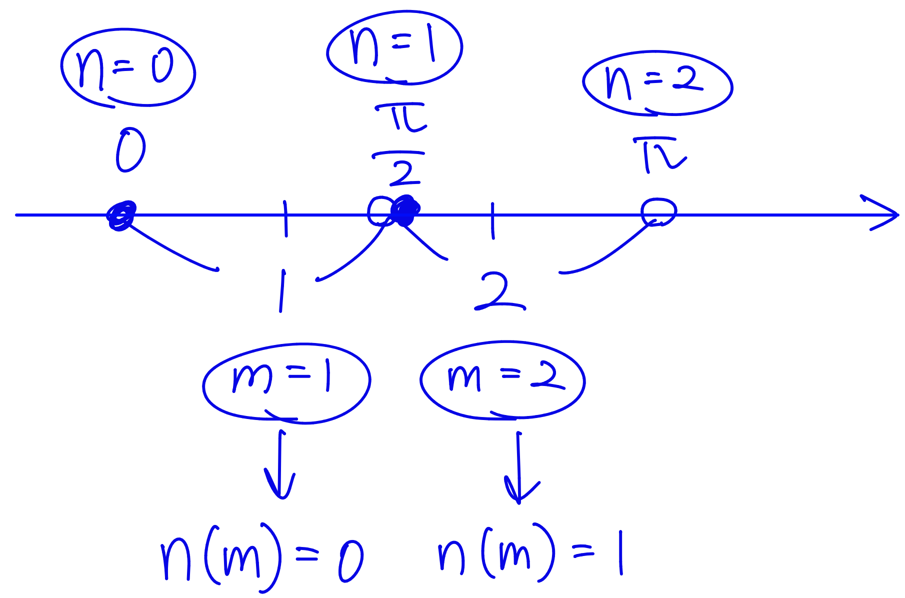
等号の有無に細心の注意!!

整数 n がただ1つ存在する。

m=1 のとき n=0 なので
n は 0以上の整数！

そこで、その n の値を $n(m)$ とおくと、
mによって決まる値

たとえば $\begin{cases} m=1 \text{ なら } n(m)=0 \\ m=2 \text{ なら } n(m)=1 \end{cases}$



要するにすぐ左にある値！

$$\frac{n(m)}{2}\pi \leqq m < \frac{n(m)+1}{2}\pi$$

$$\iff m - \frac{\pi}{2} < \frac{n(m)}{2}\pi \leqq m$$

$$\iff \frac{2m}{\pi} - 1 < n(m) \leqq \frac{2m}{\pi} \quad \cdots ①$$

を得る。

これで、m以下で最大のものについての評価ができた！

→ $p(m)$ をどう求めるか？

ここで、$\frac{n(m)}{2}\pi$ 以下の正の実数解 x の個数は $n(m)$ コなので、 ← あたり前！ $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ → 3コ.

$p(m) = n(m)$ である。

よって①より

$$\frac{2m}{\pi} - 1 < p(m) \leqq \frac{2m}{\pi}$$

→ 評価完了！ $\frac{p(m)}{m}$ を作り出す.

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} - \frac{1}{m} < \frac{p(m)}{m} \leqq \frac{2}{\pi}$$

ここで、$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right) = \frac{2}{\pi}$

$\lim_{m\to\infty}\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$ より、

はさみうちの原理から

$\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{m} = \frac{2}{\pi}$ と求められる。