

九州大学 2022 理系第3問

自然数 m, n が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \dots\dots ①$$

をみたすとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{n^2 + 1}{2}, \frac{n^2 - 1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。
- (2) $n^2 - 1$ は 168 の倍数であることを示せ。
- (3) ① をみたす自然数の組 (m, n) を 1 つ求めよ。

動画や公式を検索しやすいアプリ okke



(1) そもそも整数であるかもよくわからない。
nに代えて具体的に実験していくと、
}・n:奇数なら整数であり、
}・連続する整数になる とわかる。
まずはこれを示す。

①より、 n^4 は奇数であるので、
nは奇数である。(示すなら背理法)

あとは「互いに素」の証明、

}・素因数がかぶらない
}・最大公約数が1 ← コレ使う。

ユークリッドの
互除法と相性よい

☆連続する整数が互いに素であることは、
いつでも示せて使えるように！

nが奇数のとき、
 $\frac{n^2+1}{2}, \frac{n^2-1}{2}$ は整数であり、
 $\frac{n^2+1}{2} = \frac{n^2-1}{2} + 1$ 連続整数。

であるので、

ユークリッドの互除法により、

$$\begin{aligned} & \text{最大公約数} \quad \gcd\left(\frac{n^2+1}{2}, \frac{n^2-1}{2}\right) \\ &= \gcd\left(\frac{n^2-1}{2}, \underline{1}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となって、題意は示された。 

☆あくまでも①を満たすnについての話！
(1)(2)は注意)

(2) 整数問題の扱いに4方

- ① 積の形にする ← $n^4 - 1$ から
- ② 不等式評価 ← $n^2 - 1$ が見える。
- ③ 余りによる分類 ← 今回はハンパなし

↓
頭においておく!

$$\textcircled{1} \text{より} \quad n^4 - 1 = 210 m^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot m^2$$
$$(n^2 + 1)(n^2 - 1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 m^2 \dots \textcircled{1}'$$

168 = $2^3 \cdot 3 \cdot 7$ の倍数を示す
↓
1コずつ調べる。

まだ積の形にできる。①

$n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ であり、 n は奇数ゆえ
 $n+1, n-1$ は隣り合う偶数となる。
→ また 2^2

よってどちらかは4の倍数となるので、
 $(n+1)(n-1)$ は8の倍数となる。↑ 2^3 クリア

※ 8で割った余りで n を分類して
調べてもOK. (1, 3, 5, 7のみ)

3や7については積の形から見えてこない。
→ 余りによる分類でいく! ③

$n = 3k \pm 1$ とか書いていくの面倒
(前回動画参照) なので、表でまとめる。

★ $n^2 - 1$ を直接考えると、例えば $n = 3k$ のとき、3の倍数ではない??

あくまで、①を満たす n について。

$n^2 - 1$ が3や7の倍数を示す必要。大変。

→ $n^2 + 1$ が3や7の倍数でないことは
実はすぐには示せる!!

また、 n を 3 で割った余りと、 n^2+1 を 3 で割った余りの関係は、

n	0	1	2
n^2+1	1	2	2

← mod や $n=3k \pm 1$ とかで計算.

となりので、 n^2+1 は 3 の倍数とならない。
よって①'より n^2-1 は 3 の倍数である。
↑
3 7 11 P

同様に n を 7 で割った余りと、 n^2+1 を 7 で割った余りの関係は、

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2+1	1	2	5	3	3	5	2

となりので、 n^2+1 は 7 の倍数とならない。
よって①'より n^2-1 は 7 の倍数である。
↑
7 7 11 P

以上より、①を満たす n に対して
 n^2-1 は $2^3 \times 3 \times 7 = 168$ の倍数である
ことが示された。 

(3) あまり (1) は役に立たない...

$$\frac{n^2+1}{2} \cdot \frac{n^2-1}{2} = \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2} m^2$$

→ n や m のヒントは得られない。

とりあえず (2) を使う。

(2) より、 $n^2 = 168k + 1$ (k は 0 以上の整数)

とおくと、①'は

$$(168k+2) \cdot 168k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 m^2$$

$$\underline{8k(84k+1) = 5m^2 \dots (2)}$$

積の形! ①

→ k や m についてのヒントは?

$$8k(84k+1) = 5m^2$$

m において k があるか 探すのは メンドい
 k において m が " " 方がラク.

→ k についてのヒントが欲しい.

→ 5 を活かす

k や m は 整数 中え、 k 又は $84k+1$ は
 5 の 倍数 である。

→ k の 候補 は 1, 5, 6, 10, ...

あとは力技で m, n があるか 探す。
 答案では 1つ 書けば OK なので、
 ホツ は 書かなくていい。

$$k=1 \rightarrow 8 \cdot 1 \cdot 85 = 5m^2 \quad \times$$

$$k=5 \rightarrow 8 \cdot 5 \cdot 421 = 5m^2 \quad \times$$

$$k=6 \rightarrow 8 \cdot 6 \cdot 505 = 5m^2 \quad \times$$

$$k=10 \rightarrow 8 \cdot 10 \cdot 841 = 5m^2 \quad \text{OK!}$$

ここで、 $k=10$ とすると、②より

$$8 \cdot 10 \cdot 841 = 5m^2$$

$$m = 116$$

となり 自然数 m は存在する。

→ かしまだ 自然数 n が存在するかは
 わからない ...

$$\begin{aligned} \text{このとき、} n^2 &= 168 \times 10 + 1 \\ &= 1681 \quad \text{となり、} \end{aligned}$$

$n=41$ と 自然数 n も存在するので、

$$(n, m) = (1681, 116) \text{ は ① を 満たす}$$

ことがわかる。

ラッキー!