

九州大学 2023 理系第3問

点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{m} = (a, c)$, $\vec{n} = (b, d)$ に対して、
 $D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して、次の条件を考える。

条件Ⅰ $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす実数 r, s が存在する。

条件Ⅱ $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす整数 r, s が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件Ⅰがすべての $\vec{q}$ に対して成り立つとする。 $D \neq 0$ であることを示せ。

以下、 $D \neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル $\vec{v}, \vec{w}$ で $\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1$, $\vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ を満たすものを求めよ。

(3) さらに a, b, c, d が整数であるとし、 x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル $\vec{q}$ に対して条件Ⅱが成り立つとする。 D のとりうる値をすべて求めよ。

☆文字が多くて抽象的すぎるときは
具体的な値などで考えて把握する。

(1) 全ての $\vec{g}$ で成立 $\Rightarrow D \neq 0$

これをもとに議論していくのが
いいか？

例えば「何らかの $\vec{g}$ で試して、
「確かに $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{g}$ となる
 $r, s \in \mathbb{R}$ が存在するな」 $D \neq 0$
だね。」みたいなことが言えても、
(そもそもこれも直接はメンドい)

全ての $\vec{g}$ で言えるかはまだ不明
 $\rightarrow$ 大変！

$\rightarrow$ 背理法 の出番 (対偶)

「 $D = 0 \Rightarrow I$ が成立しない $\vec{g}$ がある」

これだと $D = 0$ を使えずし、
何か一つでも $\vec{g}$ を見つければ「いいので」
うけよう！

$D = 0$ と仮定する。このとき、 $\vec{g} = (p, q)$
($p, q \in \mathbb{R}$) として、

$$\vec{g} = r\vec{m} + s\vec{n} \quad \text{つまり}$$

$$\begin{cases} p = ra + sb \cdots ① \\ q = rc + sd \cdots ② \end{cases} \quad \text{を満たす}$$

実数 r, s が存在しないような
(p, q) が存在すること $\cdots (*)$ を示す。

$\rightarrow$ 連立方程式を解こうとすればOK

① $\times c$ - ② $\times a$ より $\leftarrow r$ 消去

$$pc - qa = s(bc - ad) \cdots ③$$

いま $D = ad - bc = 0$ より ③は

$$pc - qa = 0 \quad \text{となる。}$$

これが成り立たないような (p, q) を探せば、
(*) が示せてバンザイ

ここで、 $(p, q) = (c, -a)$ とすると、

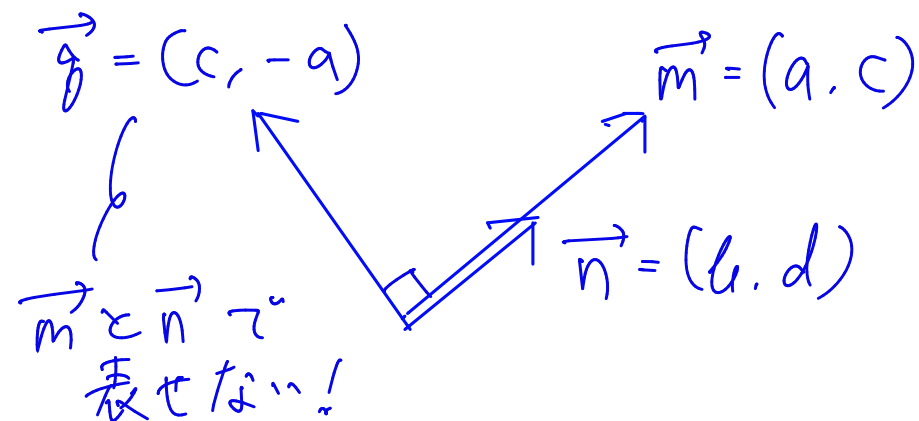
$$pc - qa = a^2 + c^2 \quad \text{であり、}$$

題意より $\vec{m} \neq \vec{0}$ つまり $(a, c) \neq (0, 0)$
なので、 $a^2 + c^2 \neq 0$ である。

よって、例えば $(p, q) = (c, -a)$ に
対して、①かつ②を満たす実数 r, s
は存在しないので、(*) は示された。 

★ $\vec{g} = (c, -a)$ は $\vec{m}$ に垂直。

$D = ad - bc = 0$ は $\vec{m} \parallel \vec{n}$ の条件。

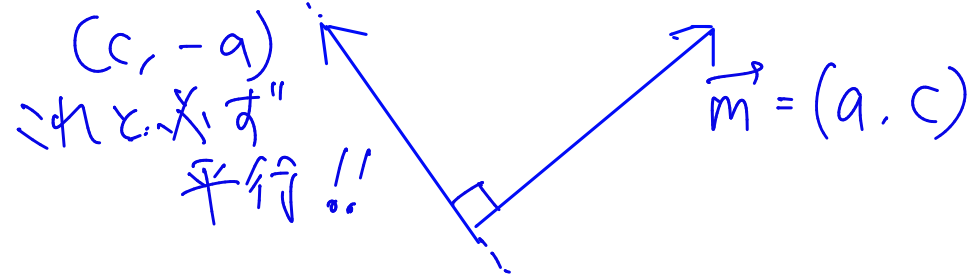


(2) $\vec{v}$ と $\vec{w}$ をそれぞれにおいて (4変数)
式4つでゴリゴリやってもいいが、メンドい。
垂直条件をうまく使う。(上の考察)

$\vec{m} = (a, c)$ に垂直なベクトルの一つとして
 $(c, -a)$ があるので、 $\vec{m} \cdot \vec{w} = 0$ より

$$\vec{w} = k(c, -a) \quad (k \text{ は実数}) \quad \text{と表せる。}$$

変数でOK! $\vec{0}$ も表せる。



同様に $\vec{n} = (b, d)$ に対して
 $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ より $\vec{v} = l(d, -b)$ (l は実数)
 と表せる。
 $\rightarrow$ 2変数に対してあと2式で
 解ける!

ここで、 $\vec{m} \cdot \vec{v} = 1$ より

$$l(ad - bc) = 1$$

$D = ad - bc \neq 0$ より

$$l = \frac{1}{ad - bc} \rightarrow$$

同様に $\vec{n} \cdot \vec{w} = 1$ より

$$k(bc - ad) = 1$$

$bc - ad = -D \neq 0$ より

$$k = \frac{1}{bc - ad} \rightarrow$$

よって、 $\vec{w} = \frac{1}{bc - ad} (c, -a)$

$\vec{v} = \frac{1}{ad - bc} (d, -b)$ となる。

(3) (1)と同じように式で考えて、 r, s について
 解くと議論できそう。

前回の初見動画ではゴリゴリ

連立方程式を解いたが、実は(2)が
 誘導になっていて、気付くというなので
 今回はそれで! (本番で気付くのは
 大変かも...)

$$\vec{q} = r\vec{m} + s\vec{n}$$

ここに、 $\vec{w}, \vec{v}$ と
 内積をとって(2)の
 形を作ると、
 r, s が求められ
 求まる。

両辺と $\vec{w}$ の内積をとると、

$$\vec{q} \cdot \vec{w} = r \underbrace{\vec{m} \cdot \vec{w}}_0 + s \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{w}}_1 \quad \leftarrow (2)より$$

$\vec{q} = (x, y)$ (x, y は整数) とおくと

$$s = (x, y) \cdot \frac{1}{bc-ad} (c, -a) \\ = \frac{ya - xc}{D} \quad \rightarrow \quad \text{すぐ解ける!}$$

同様に $\vec{v}$ と内積をとると、

$$\vec{q} \cdot \vec{v} = r \underbrace{\vec{m} \cdot \vec{v}}_1 + s \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{v}}_0 \\ r = (x, y) \cdot \frac{1}{ad-bc} (d, -b) \\ = \frac{xd - yb}{D} \quad \rightarrow$$

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ のもとで、
全ての整数 x, y に対して r, s が
整数となるとき、 D のとりうる値を
求める。 $\rightarrow$ 結構ムズそう。

★ 必要条件から求める。

全ての整数で調べ尽くすのは
大変なので、候補を大きく絞れる
値で絞り込む

$\rightarrow x$ や y が 0 や 1 のときに着目

ここで、 $(x, y) = (0, 1)$ とすると
 $s = \frac{a}{D}, r = -\frac{b}{D} \quad \rightarrow \text{考えやすい!}$

$(x, y) = (1, 0)$ とすると $s = -\frac{c}{D}, r = \frac{d}{D}$
であるので、これらが整数より

D は a, b, c, d の公約数で、あきこが
必要。負を令す

繰り返した！あとは十分性... だが、例えは
全て偶数だとうまくいかない(前回参照)
さらに深く検討

そこで、 a, b, c, d の公約数のうち
最大のものを g とおき、

$$a = ga', b = gb', c = gc', d = gd'$$

(a', b', c', d') は互いに素な整数

とおく。

このとき

$$D = ad - bc \leftarrow Dはa, b, c, dにより決まる.$$

$$= g^2(a'd' - b'c') \text{ となり.}$$

$$s = \frac{ua - tc}{D} = \frac{\cancel{g}(ua' - tc')}{g^{\cancel{2}}(a'd' - b'c')}$$

$$= \frac{ua' - tc'}{g(a'd' - b'c')}$$

$$r = \frac{td - ub}{D} = \frac{td' - ub'}{g(a'd' - b'c')}$$

を得る。分母に g 残る!!

→ ときと同様 t, u に特徴的なものを!

ここで

$$(t, u) = (0, 1) \text{ とすると}$$

$$s = \frac{a'}{g(a'd' - b'c')}, r = \frac{-b'}{g(a'd' - b'c')}$$

$$(t, u) = (1, 0) \text{ とすると}$$

$$s = \frac{-c'}{g(a'd' - b'c')}, r = \frac{d'}{g(a'd' - b'c')}$$

であり、これらの整数かつ $g, a'd' - b'c'$ も
整数ゆえ、

g と $a'd' - b'c'$ は a', b', c', d' の
公約数であることが必要で、

いま a', b', c', d' は互いに素なので

$$g = \pm 1, \quad a'd' - b'c' = \pm 1$$

つまり $D = g^2(a'd' - b'c') = \pm 1$ が必要。

さらに絞られた...!

逆にこのとき、

$$s = \frac{ua - \pi c}{D = \pm 1}, \quad r = \frac{\pi d - ub}{D = \pm 1}$$

は、 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ のもとで、

全ての整数 π, u に対して整数になる。

やっと十分性言えた

よって D のとりうる値は $D = \pm 1$ である。