大阪大学 2022 理系第3問

正の実数 t に対し、座標平面上の 2 点 $P(0, t)$ と $Q\left(\dfrac{1}{t}, 0\right)$ を考える。t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき、座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ。

線分(直線)の通過領域の考え方

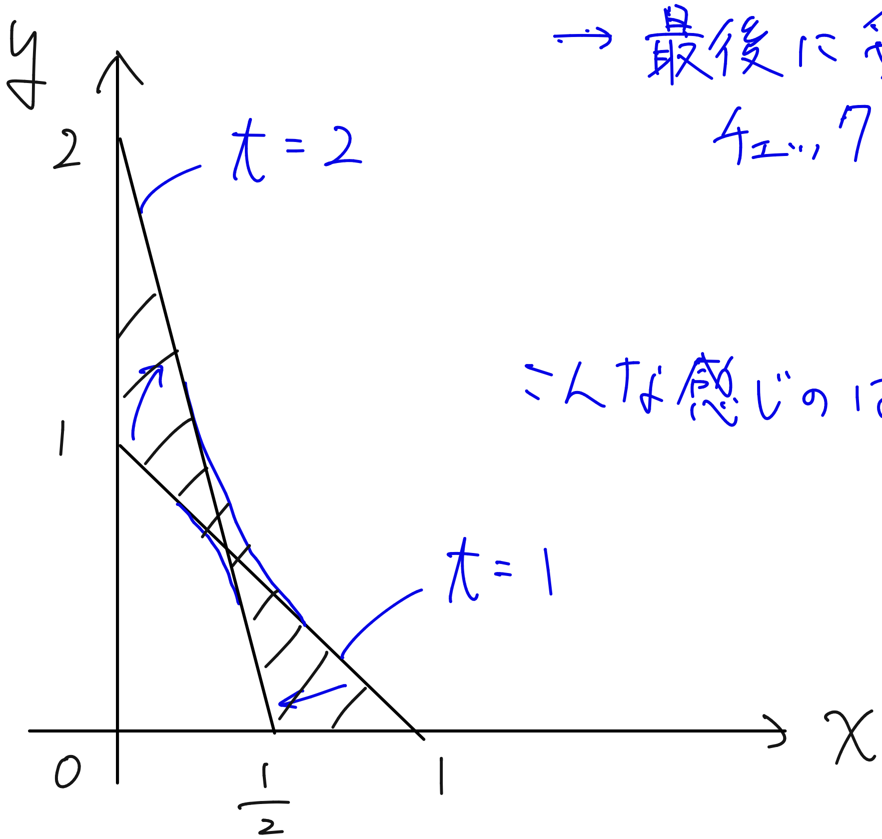
→ 良問演習 65, 66/100 を復習

順像法と逆像法の考え方をマスターして、選べるように！

今回はどちらも紹介します。

まずはグラフで視覚化して捉える。

→ 最後に答えの妥当性チェックができる



こんな感じのはず…

考え方① 順像法で

グラフから領域上の x のとりうる値の範囲はわかるので、x を固定して考えられる！

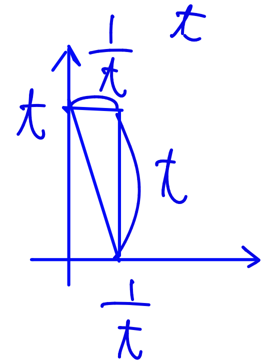
題意の領域を D とし、D 上の点を (x, y) とする。このときグラフから x のとりうる値の範囲は $0 \leqq x \leqq 1$ であり、

$x=k\ (0 \leqq k \leqq 1)$ としたときの y のとりうる値の範囲を求める。

直線 PQ の式は

$$y=-t^2x+t$$

傾き $-\frac{t}{\frac{1}{t}}=-t^2$



より、$x=k$ を代入して

$$y=-t^2k+t$$

この右辺を $f(t)$ とおくと、求める y の値域は、$f(t)$ の $1 \leqq t \leqq 2$ での値域のうち、$y \geqq 0$ を満たす範囲である。

「線分」PQ は第1象限 !!

あとは作業

$$f(t) = -k\left(t - \frac{1}{2k}\right)^2 \cdots$$ としたいが、

$k=0$ のときは1次関数で別扱い!

(i) $k=0$ のとき、

$f(t)=t$ となるので

求める y の値域は $\underline{1 \leqq y \leqq 2}$

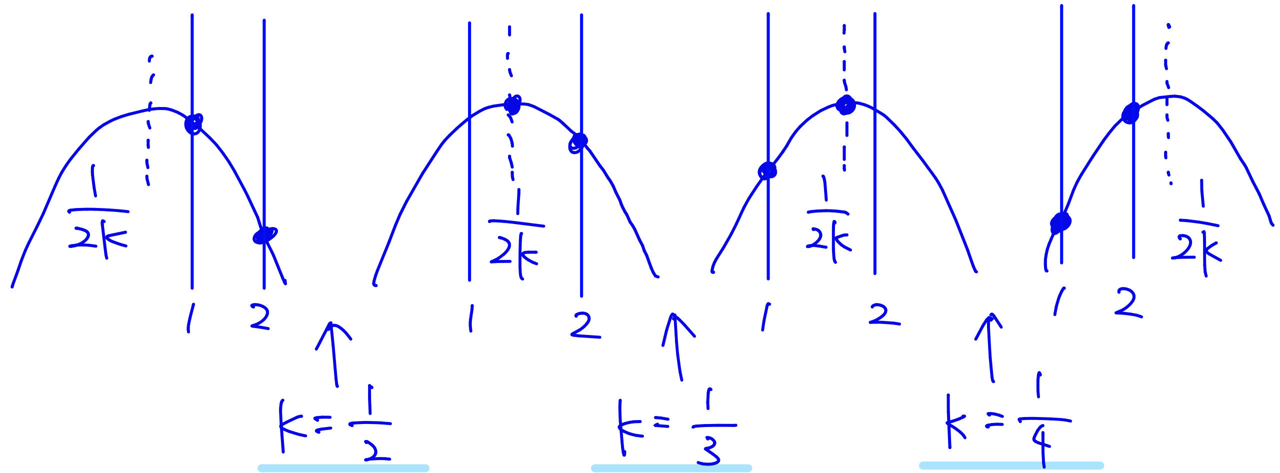
t を $1 \sim 2$ で動かす。
0以上も満たす。

(ii) $0<k \leqq 1$ のとき、

$$f(t) = \underbrace{-k}_{<0}\left(t - \frac{1}{2k}\right)^2 + \frac{1}{4k}$$ より、

以下 k の値により場合分けする。

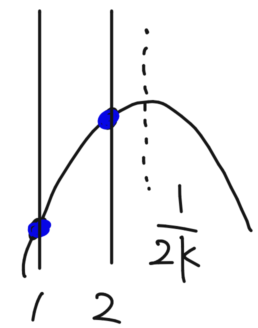
$$0<k \leqq 1 \iff \frac{1}{2k} \geqq \frac{1}{2}$$



max, min のパターンはこの4つ!

(ア) $0<k \leqq \frac{1}{4}$ のとき、 ← 軸: $\frac{1}{2k} \geqq 2$

$f(t)$ の $1 \leqq t \leqq 2$ での値域は



min $\underline{f(1)} \leqq f(t) \leqq \underline{f(2)}$ max

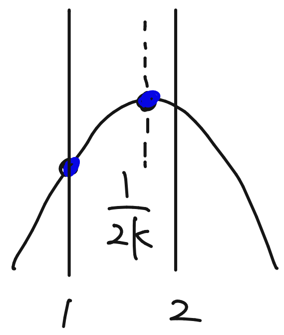
$\iff -k+1 \leqq f(t) \leqq -4k+2$

となり、0以上となるので、求める y の値域は $\underline{-k+1 \leqq y \leqq -4k+2}$

(イ) $\frac{1}{4} < k \leqq \frac{1}{3}$ のとき、 ← 軸：$\frac{3}{2} \leqq \frac{1}{2k} < 2$

$f(t)$ の $1 \leqq t \leqq 2$ での値域は

min $\underline{f(1)} \leqq f(t) \leqq \underline{f\left(\frac{1}{2k}\right)}$ max



$\Leftrightarrow -k+1 \leqq f(t) \leqq \frac{1}{4k}$

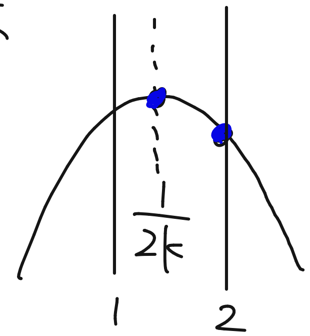
となり、0以上となるので、求める

y の値域は $\underline{-k+1 \leqq y \leqq \frac{1}{4k}}$

(ウ) $\frac{1}{3} < k \leqq \frac{1}{2}$ のとき、 ← 軸：$1 \leqq \frac{1}{2k} < \frac{3}{2}$

$f(t)$ の $1 \leqq t \leqq 2$ での値域は

min $\underline{f(2)} \leqq f(t) \leqq \underline{f\left(\frac{1}{2k}\right)}$ max



$\Leftrightarrow -4k+2 \leqq f(t) \leqq \frac{1}{4k}$

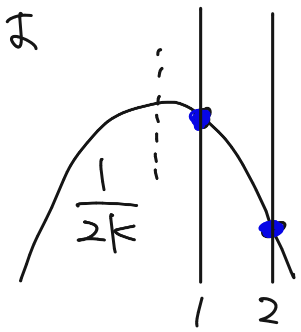
となり、0以上となるので、求める

y の値域は $\underline{-4k+2 \leqq y \leqq \frac{1}{4k}}$

(エ) $\frac{1}{2} < k \leqq 1$ のとき、 ← 軸：$\frac{1}{2k} < 1$

$f(t)$ の $1 \leqq t \leqq 2$ での値域は

min $\underline{f(2)} \leqq f(t) \leqq \underline{f(1)}$ max



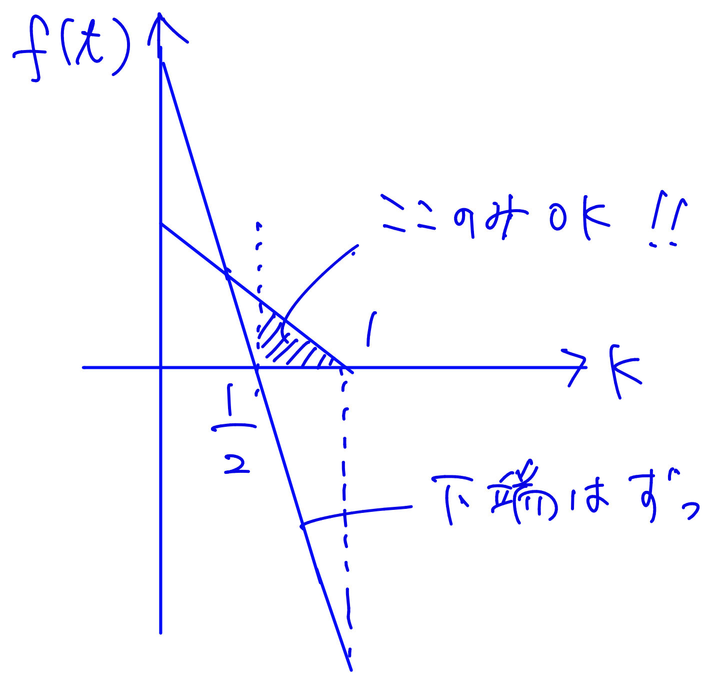
$\Leftrightarrow -4k+2 \leqq f(t) \leqq -k+1$

となり、$\frac{1}{2} < k \leqq 1$ のもとで

$\underline{-4k+2 < 0, \ -k+1 \geqq 0}$ となるので、

求める y の値域は $\underline{0 \leqq y \leqq -k+1}$

0以上のみ!!



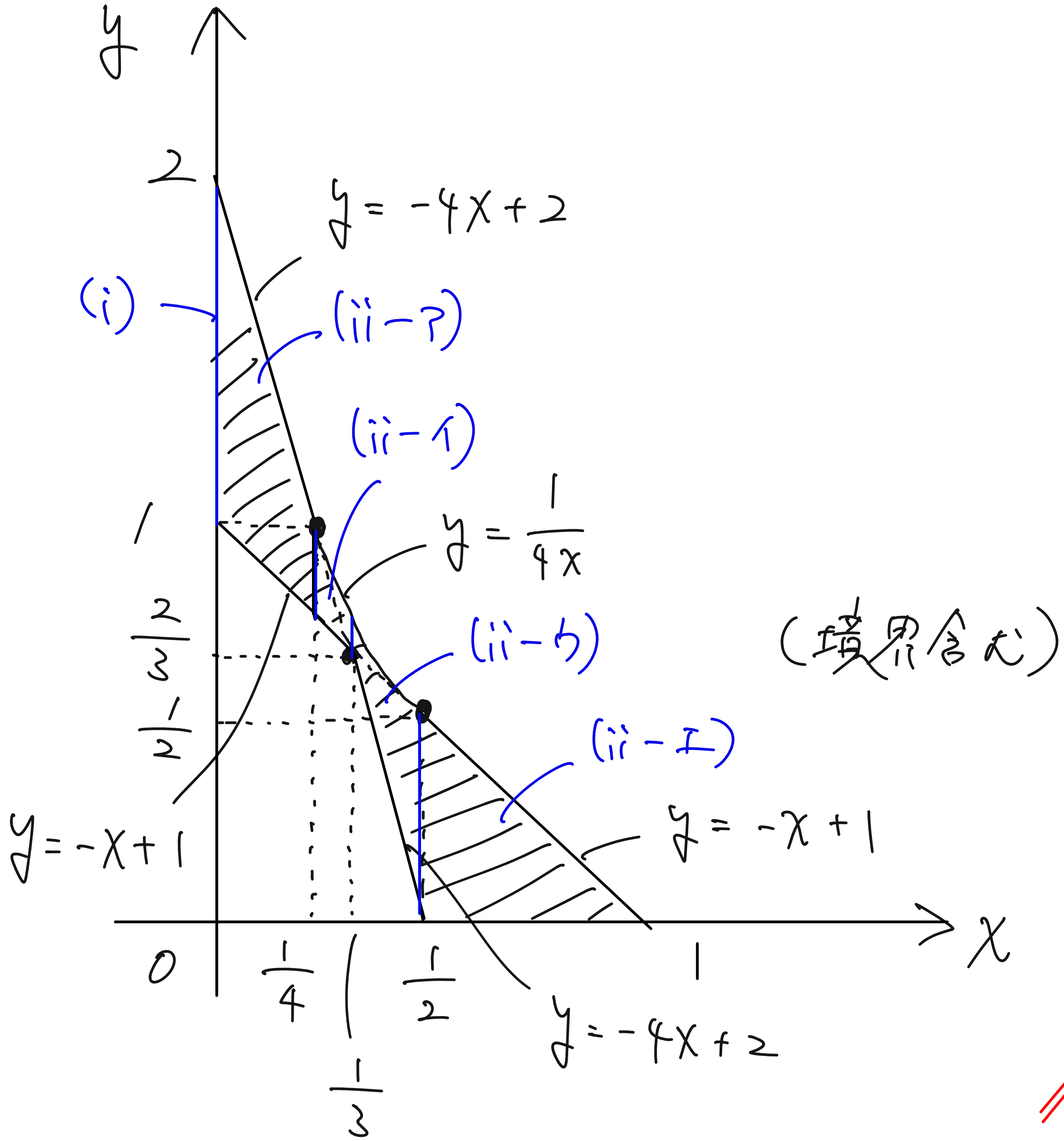
以上(i)(ii)をまとめて、kをxに変えると、
領域Dの式は

$$
\begin{cases}
x=0 \text{ のとき} & 1 \leqq y \leqq 2 \\
0<x \leqq \frac{1}{4} \text{ 〃} & -x+1 \leqq y \leqq -4x+2 \\
\frac{1}{4}<x \leqq \frac{1}{3} \text{ 〃} & -x+1 \leqq y \leqq \frac{1}{4x} \\
\frac{1}{3}<x \leqq \frac{1}{2} \text{ 〃} & -4x+2 \leqq y \leqq \frac{1}{4x} \\
\frac{1}{2}<x \leqq 1 \text{ 〃} & 0 \leqq y \leqq -x+1
\end{cases}
$$

となる。

これを図示すると以下の通り。

☆連続しているか、
最初の考察通り妥当なものに
なっているか。に注意！



考え方② 逆像法で

線分が領域上の (X, Y) を通るような t が $1 \leqq t \leqq 2$ に存在するかで考える.

題意の領域を D とし, D 上の点を (X, Y) とする。線分 PQ の式は

$$\begin{cases} y = -t^2 x + t \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

と表せるので,

$$\begin{cases} Y = -t^2 X + t \\ X \geqq 0 \\ Y \geqq 0 \end{cases}$$

← 線分が (X, Y) を通る

を満たす t が $1 \leqq t \leqq 2$ に存在するような, (X, Y) についての必要十分条件を求める。

つまり, $X \geqq 0$, $Y \geqq 0$ のもと,

大関係ない

$Xt^2 - t + Y = 0 \cdots (*)$ が $1 \leqq t \leqq 2$ に実数解をもつような (X, Y) の必要十分条件を求める。

2次方程式の解の配置問題に帰着!!
($X = 0$ は例外)

(i) $X = 0$ のとき,

$(*)$ は $-t + Y = 0$

$t = Y$ となるので,

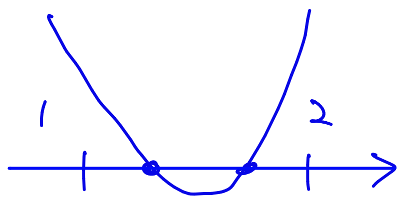
$1 \leqq Y \leqq 2$ が必要十分. → $1 \leqq t \leqq 2$ に実数解もつ

(ii) $X > 0$ のとき,

$(*)$ は $X\left(t - \dfrac{1}{2X}\right)^2 - \dfrac{1}{4X} + Y = 0$ となり,

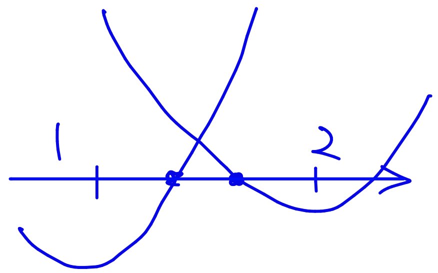
この左辺を $g(t)$ とおく.

$g(t)=0$ が $1\leqq t\leqq 2$ に実数解をもつような必要十分条件は、$X>0$ のもと



軸&D&端点

or



端点の積 $\leqq 0$

$$\begin{cases} 1\leqq \dfrac{1}{2X}\leqq 2 \\ -\dfrac{1}{4X}+Y\leqq 0 \quad \leftarrow \text{頂点の}y \\ g(1)=X-1+Y\geqq 0 \\ g(2)=4X-2+Y\geqq 0 \end{cases}$$

又は $g(1)\,g(2)\leqq 0$

$\Updownarrow$

$g(1)\geqq 0$ かつ $g(2)\leqq 0$

又は

$g(1)\leqq 0$ かつ $g(2)\geqq 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4}\leqq X\leqq \dfrac{1}{2} \\ Y\leqq \dfrac{1}{4X} \\ Y\geqq -X+1 \\ Y\geqq -4X+2 \end{cases} \quad \text{又は} \begin{cases} Y\geqq -X+1 \\ Y\leqq -4X+2 \end{cases} \quad \text{又は} \begin{cases} Y\geqq -4X+2 \\ Y\leqq -X+1 \end{cases}$$

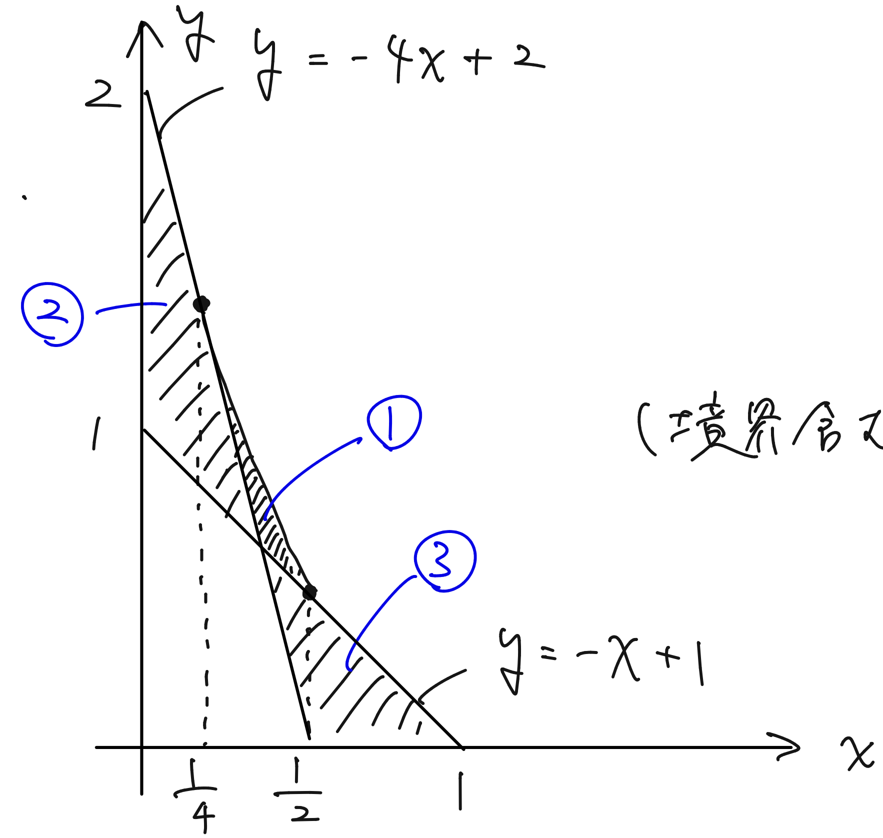
よって、求める領域 D の式は、

$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のもと、 大前提！

$$① \begin{cases} \dfrac{1}{4}\leqq x\leqq \dfrac{1}{2} \\ y\leqq \dfrac{1}{4x} \\ y\geqq -x+1 \\ y\geqq -4x+2 \end{cases} \quad \text{又は} \quad ② \begin{cases} y\geqq -x+1 \\ y\leqq -4x+2 \end{cases} \quad \text{又は} \quad ③ \begin{cases} y\geqq -4x+2 \\ y\leqq -x+1 \end{cases}$$

となるので、

図示すると、



(境界含む)

//