また確率の一般項！

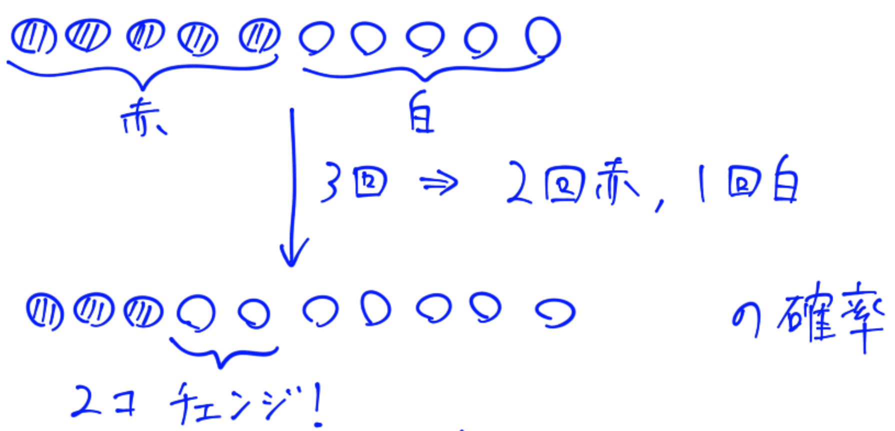
→ ①直接計算 ②漸化式の立式 を選択

これまでの例：2020 阪大文, 北大文, 名大理

★問題が抽象的

→ 実験して設定を理解する.

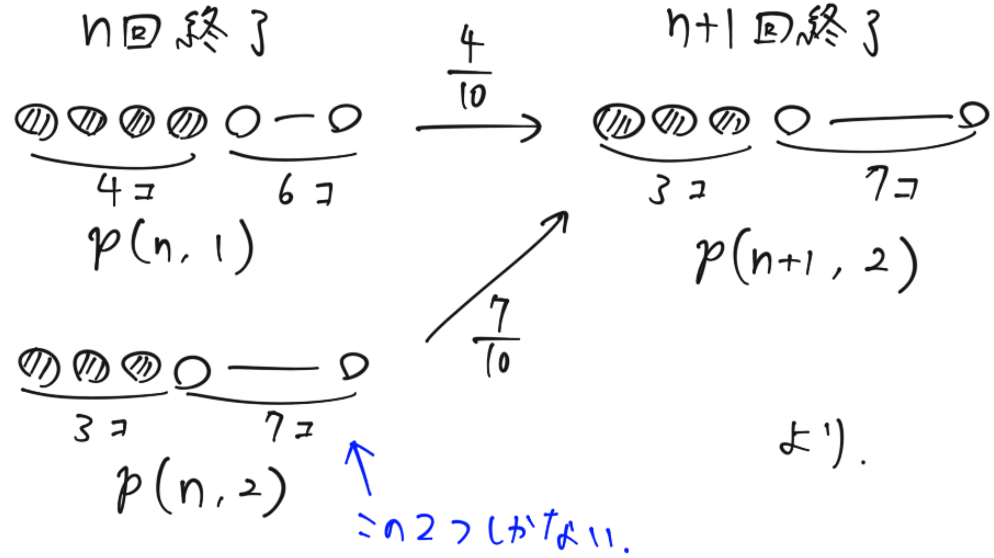
たとえば $m=3$, $k=2$ だと？ $p(3,2)$ は,



白を引いても何も起きん.

(1) ◎を赤, ○を白とする。

推移図を考えると, $n \geqq 2$ のもとで



より.

$$p(n+1,2)=\frac{4}{10}p(n,1)+\frac{7}{10}p(n,2)$$

なぜ $n \geqq 2$？

→ $n=1$ だと $p(n,2)$ は起こり得ないので 0 になってしまう.

(2) 考え方① : 直接計算

$p(n,1)$ は n回繰り返して黒を1回, 白を$n-1$回引く確率である。

黒をk回目 (kは $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数) に引くとすると, 確率は

$$\underbrace{\left(\frac{5}{10}\right)^{k-1}}_{\text{白を引く}} \times \underbrace{\frac{5}{10}}_{\text{黒}} \times \underbrace{\left(\frac{6}{10}\right)^{n-k}}_{\text{白を引く}}$$ なので,

白を引く → 黒 → 白を引く

$$p(n,1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}$$ ↑立式

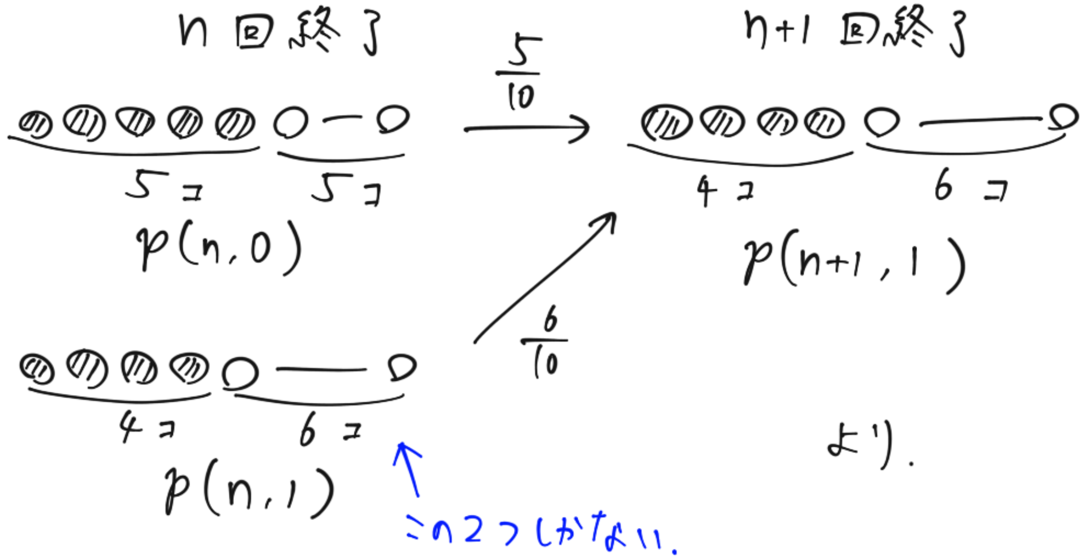
$$= \left(\frac{3}{5}\right)^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{k}$$

k以外は外に出す

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^{n} \cdot \frac{\frac{5}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right)}{1-\frac{5}{6}}$$

$$= 5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n} - 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$ ☆代入チェック($n=2$)

考え方② : 漸化式の立式



より.

$$p(n+1,1) = \frac{6}{10}p(n,1) + \frac{5}{10}p(n,0) \quad \cdots ①$$

ここで, $p(n,0)$は n回全て白を引く確率で,

それは $\left(\frac{5}{10}\right)^{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ である。

よって①は

$$p(n+1,1)=\frac{6}{10}p(n,1)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

↑立式

ここで $p(n,1)=p_n$ とおく。← ラクをするため

このとき $p_{n+1}=\frac{3}{5}p_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ …②

$\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$ で両辺を割ると、

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}p_{n+1}=\left(\frac{5}{3}\right)^{n}p_n+\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$$

→ 階差に変形できた!

よって、$n\geqq 3$ のとき、

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{n}p_n=\left(\frac{5}{3}\right)^{2}p_2+\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{k+1}$$

ここで、$p_2=p(2,1)$

$$=\underbrace{\frac{5}{10}\times\frac{6}{10}}_{黒\to白}+\underbrace{\frac{5}{10}\times\frac{5}{10}}_{白\to黒}=\frac{11}{20}$$

なので、

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{n}p_n=\frac{55}{36}+\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right)}{1-\frac{5}{6}}$$

$$=5-5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$

$$\therefore\ p_n=5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\quad(n\geqq 3)$$

$n=2$ のとき右辺は $\frac{11}{20}$ となり、これは成り立つ。

よって $p(n,1)=\underline{5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$

(②の別の解き方)

にコ進めた形にできるか?

$$p_{n+1}-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{5}\left(p_n-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ p_{n+1}=\frac{3}{5}p_n-\frac{\alpha}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$ より、

$\alpha=-5$ とすれば②を変形できる。つまり、

$$p_{n+1}+5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{5}\left(p_n+5\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$ → 等比!!

よって，

$$p_n+5\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}\left(p_2+\frac{5}{4}\right)$$

→ あとはすぐ求まる．

☆階差より等比に変形した方がラク！

(3) (1)があるので，漸化式による解き方が求められてはいるものの…

考え方①：直接計算

$p(n,2)$ は n 回繰り返して黒を2回，白を $n-2$ 回引く確率である。2回目の黒を l 回目（l は $2\leqq l\leqq n$ を満たす整数）に引くとすると

☆ミソ！

確率は $\underbrace{p(l-1,\ 1)}_{l-1\text{回終了時に黒1枚引いてる}}\times\underbrace{\frac{4}{10}}_{\to\text{黒}}\times\left(\frac{7}{10}\right)^{n-l}$ なので

→ 白を引く

$$p(n,2)=\sum_{l=2}^{n}p(l-1,\ 1)\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{7}{10}\right)^{n-l}\quad(※)$$

立式

$$=\underbrace{\frac{2}{5}\left(\frac{7}{10}\right)^n}_{\text{カンケーない}}\sum_{l=2}^{n}\left\{\underbrace{5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{l-1}-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}}_{(2)\text{より}}\right\}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{-l}$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^n\cdot\frac{50}{7}\sum_{l=2}^{n}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^{l-1}-\left(\frac{5}{7}\right)^{l-1}\right\}$$

等比の和

$$=\frac{20}{7}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^n\cdot\left\{\frac{\frac{6}{7}\left(1-\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{6}{7}}-\frac{\frac{5}{7}\left(1-\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{5}{7}}\right\}$$

$$=20\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^n\left\{\frac{6}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^n-\frac{5}{14}+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$

$\frac{1}{2}$

$$=10\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^n-20\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

☆代入チェック $(n=2)$

(※) $\ell=2$ のとき $p(1,1)$ はいいのか？
一応 $p(1,1)$ は定義できるので OK としている。
$n \geqq 2$ より、$p(n,1)$ と書いた場合は、$p(1,1)$ は考えないことになる。ややこしいけど…

考え方②：漸化式の立式

(1)(2)より、

$$p(n+1,2)=\frac{7}{10}p(n,2)+\frac{4}{10}p(n,1)$$

$$=\frac{7}{10}p(n,2)+\left\{2\left(\frac{3}{5}\right)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

立式

ここで $p(n,2)=q_n$ とおく。← ラクをするため

$$q_{n+1}=\frac{7}{10}q_n+\left\{2\left(\frac{3}{5}\right)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$ を解く。

→ (2)と同様に、階差に持っていってもOK.
数字がゴチャゴチャしたので、ここは等比でやる。

いま、

$$\underline{q_{n+1}-\left(\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$$ 1つ進める。

$$=\frac{7}{10}\left(\underline{q_n-\left(\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^n-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow q_{n+1}=\frac{7}{10}q_n-\frac{\alpha}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{\beta}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ であり、

$$\begin{cases}-\dfrac{\alpha}{10}=2\\ \dfrac{\beta}{5}=-2\end{cases}$$ ← 係数をそろえる。

を解くと、$(\alpha,\beta)=(-20,-10)$

よって漸化式は

$$q_{n+1}+\left(20\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}-10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$=\frac{7}{10}\left(q_n+\left(20\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n-10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)$$ と

変形できる。これを解くと

等比になった！

$$q_n+\left(20\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n-10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$=\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}\left(q_2+\left(20\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2-10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\right)$$

ここで、定義より

$$q_2 = p(2,2)$$

$$= \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{1}{5}$$ なので、

$$q_n + \left(20\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n - 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= \left(\frac{7}{10}\right)^{n-2} \underline{\left(\frac{1}{5} + \left(20\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\right)} = \frac{49}{10}$$

$$= 10\left(\frac{7}{10}\right)^n$$

$$\therefore\ q_n = p(n,2) = \underline{10\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^n - 20\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n + 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$ //