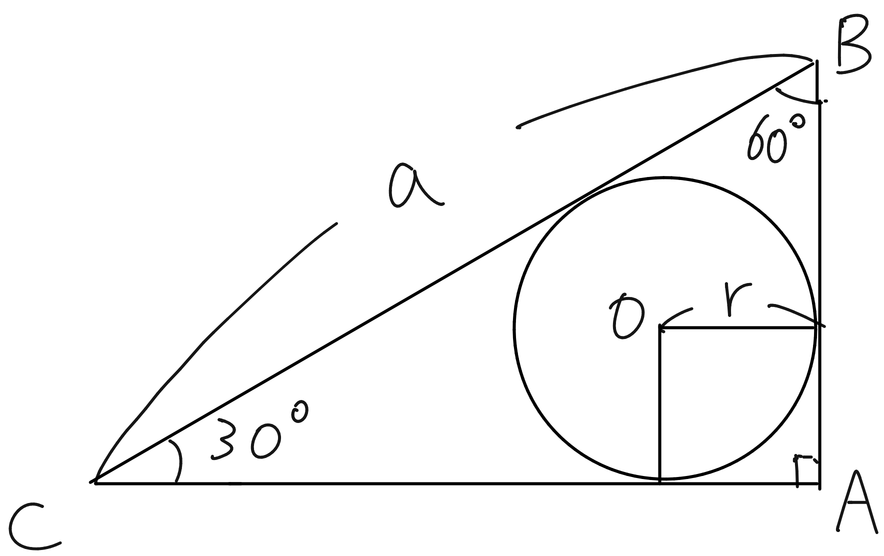
北海道大学 2022 文系第3問

$\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ である直角三角形 ABC において、その内接円の中心を O、半径を r とおく。また $a = BC$ とする。

(1) r を a で表せ。

(2) 次の条件をみたす負でない整数 k, l, m, n の組を一つ求めよ。

$$OA : OB = 1 : k + \sqrt{l}, \quad OA : OC = 1 : m + \sqrt{n}$$



(1) 考え方① 面積について立式

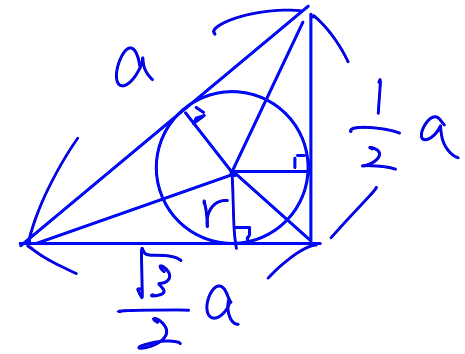
$AB=\frac{1}{2}a$, $AC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ となるので

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

一方，rを用いて表すと ← 内接円の半径

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times r\times\left(a+\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$

$=\frac{3+\sqrt{3}}{4}ar$ なので．



$\frac{3+\sqrt{3}}{4}ar=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

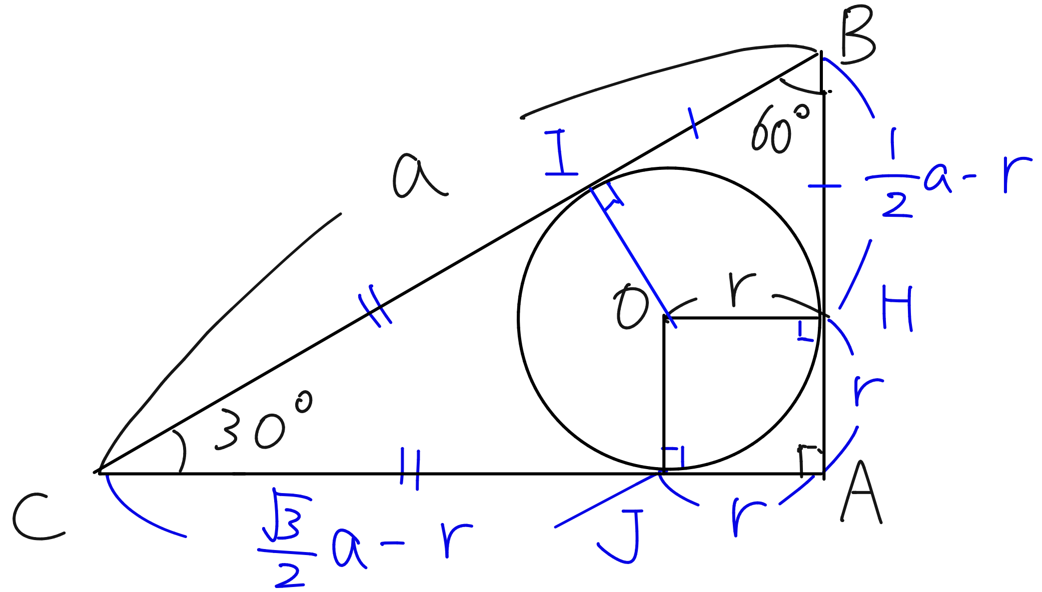
$a\neq 0$ より．

$r=\frac{\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})}a$

$=\frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{12}a$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{4}a$ となる。

考え方② 長さについて立式



Oから AB, BC, CA に下ろした垂線の足を H, I, J とおく。

AH = AJ = r より、

$BH = BA - HA = \frac{1}{2}a - r$

$CJ = CA - JA = \frac{\sqrt{3}}{2}a - r$ であり、

円に引いた接線の長さは等しいので

$BI = BH = \frac{1}{2}a - r$

$CI = CJ = \frac{\sqrt{3}}{2}a - r$ となる。

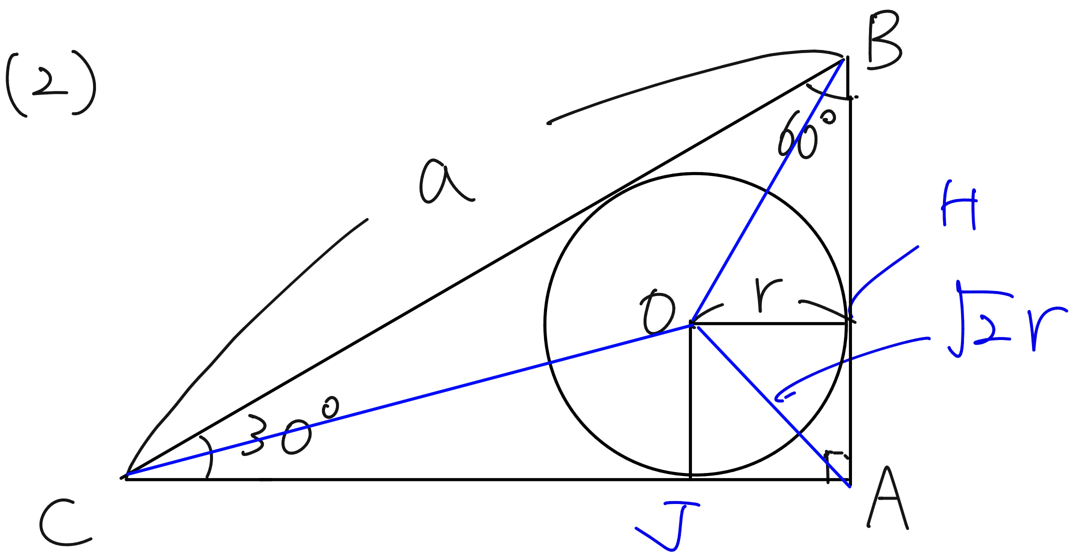
よって BC の長さについて

$a = \left(\frac{1}{2}a - r\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - r\right)$

⋮

同様。

(2)



→ OB, OC を r で表せば OK!

$OA=\sqrt{2}r$であり、以下OB, OCをrで表す。

どんな特徴?

ここで、OB, OCはそれぞれ∠B, ∠Cを二等分するので、$\angle OBA=30°$, $\angle OCA=15°$である。

証明できる?

・OBについて

△OHBに着目して

30° 60° 90°の三角形!

$$OB=\frac{OH}{\sin 30°}=2r$$

よって $OA:OB=\sqrt{2}r:2r$
$=1:\sqrt{2}$ を得る。

$0+\sqrt{2}$

こっちを1に持っていく

・OCについて

△OJCに着目して

$$OC=\frac{OJ}{\sin 15°}$$ となる。

求められる! 半角でもいいが…
2重根号がメンドい
→ 加法定理で!

ここで

$$\sin 15°=\sin(45°-30°)$$

60°−45°とかも

$$=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$ なので、

$$OC=\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}r$$ と求められる。

よって $OA : OC = \sqrt{2}r : \dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}r$

$$= \underbrace{1}_{\text{こっちは1で固定！}} : \frac{4}{2\sqrt{3}-2} \leftarrow \sqrt{12}-\sqrt{4}$$

$$= 1 : \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$= \underline{1 : 1+\sqrt{3}}$$ となるので

$(k, l, m, n) = \underline{(0, 2, 1, 3)}$ と求められる。

※正弦定理でもいける！
$(\triangle OAB, \triangle OAC)$