

東北大学 2022 文系第3問

a, b を正の実数とし、 xy 平面上の直線 $l : ax + by - 2 = 0$ を考える。

- (1) 直線 l と原点の距離が 2 以上であり、直線 l と直線 $x = 1$ の交点の y 座標が 2 以上であるような点 (a, b) のとりうる範囲 D を求め、 ab 平面上に図示せよ。
- (2) 点 (a, b) が (1) で求めた範囲 D を動くとする。このとき、 $3a + 2b$ を最大にする a, b の値と、 $3a + 2b$ の最大値を求めよ。

(1) l がいろいろ動かし、条件を式にいて
ゴリゴリ処理できそう.

$$l: ax + by - 2 = 0$$

l と $(0,0)$ のキョリが 2 以上

$$\Leftrightarrow \frac{|-2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{a^2 + b^2 \leq 1} \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 l と $x=1$ の交点は、

$$a + by - 2 = 0$$

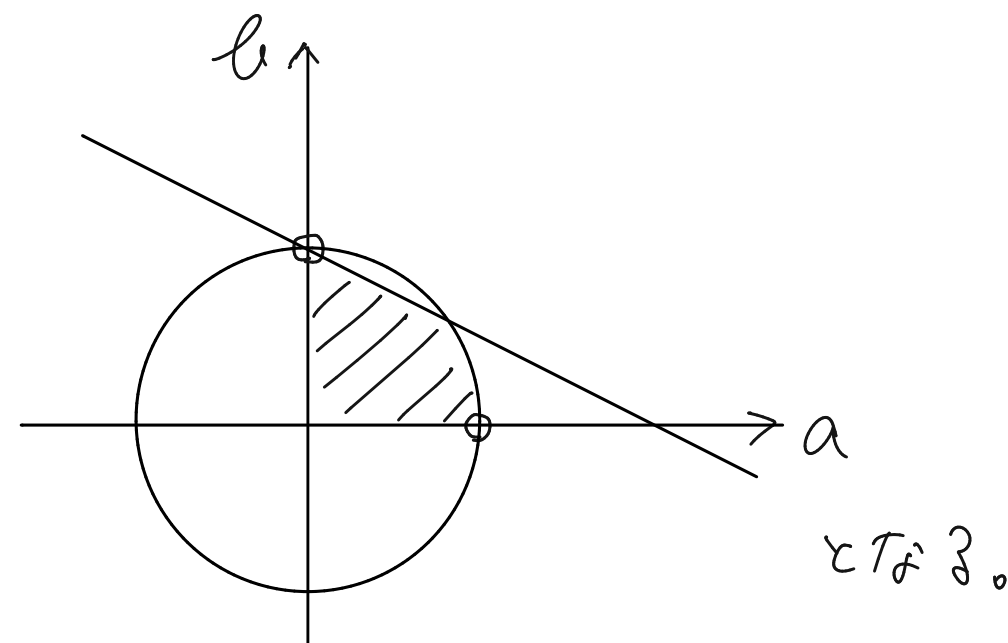
$$b > 0 \text{ より } y = \frac{-a+2}{b} \text{ より、}$$

$$\frac{-a+2}{b} \geq 2$$

$$-a+2 \geq 2b \quad (b > 0 \text{ より})$$

$$\underline{a+2b \leq 2} \quad \dots \textcircled{2}$$

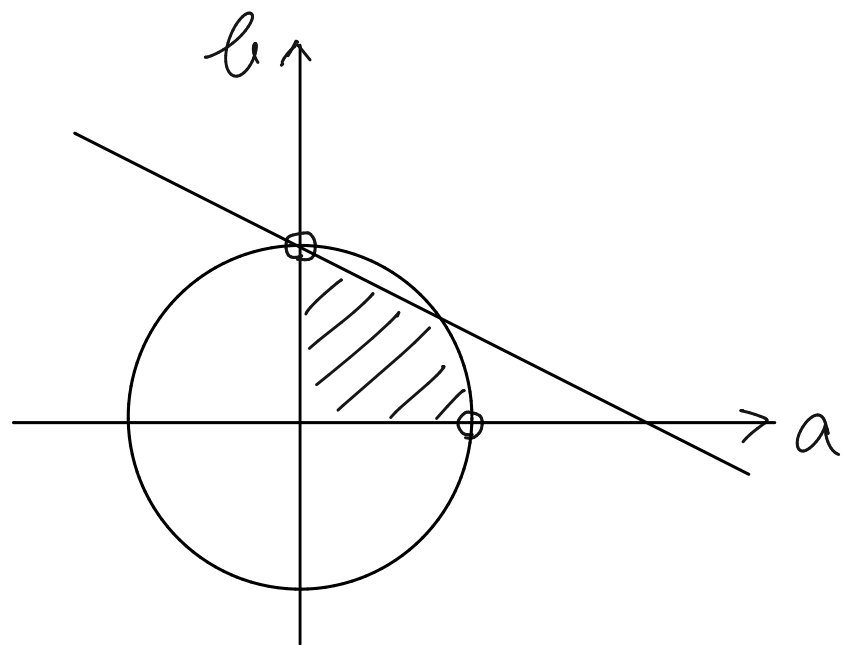
$a, b > 0$ のもと $\textcircled{1} \textcircled{2}$ を図示すると、 D は



境界は a 軸, b 軸上は含まず、他は
全て含む。

(2) いわゆる サ・線形計画法の問題

→ 良問演習 1A2B 63/100



$3a + 2b = k$ とおく。

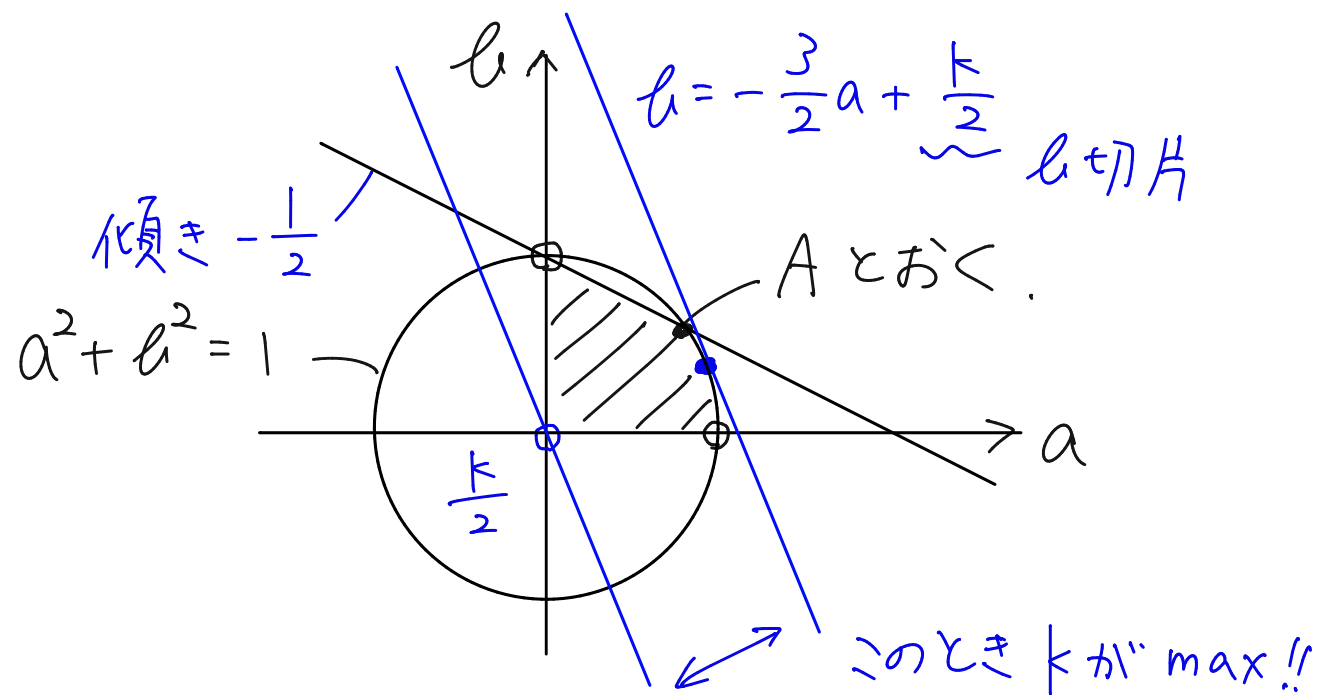
→ $3a + b$ が k という値をとるとするのは、
 $3a + b = k$ を満たす D 上の点 (a, b) が存在するということ。

→ (a, b) の存在条件を考えることで
 k のとりうる範囲がわかる (逆像法)

→ 式で考えるよりも 図形的に共有点があるかで考えるのがラク (線形計画法)



この直線と D が共有点を持つ k の最大値を考える。



どこまで上に行けるかの検討!!

直線 $a+2b=2$ と円 $a^2+b^2=1$ の交点 A を求める。

$$(2-2b)^2 + b^2 = 1$$

$$5b^2 - 8b + 3 = 0 \rightarrow b=1 \text{ が解であることは}$$

$$(b-1)(5b-3) = 0$$

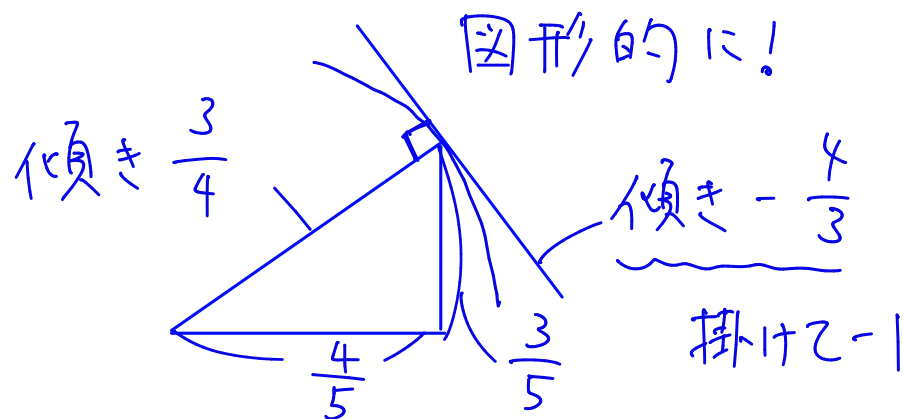
$$b = \frac{3}{5}, 1$$

わかってる!

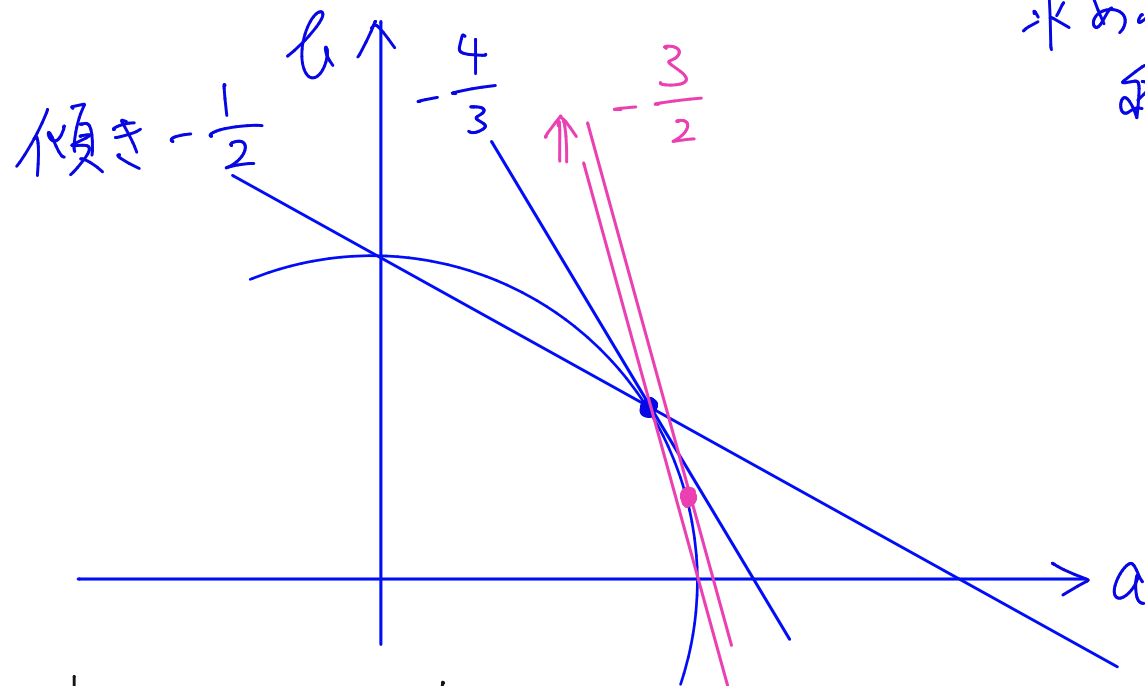
よ)、 A の座標は $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ となる。

この点での円の接線の傾きは $-\frac{4}{3}$ である。

あり、 $-\frac{4}{3} > -\frac{3}{2}$ であるから、



直線 $3a+2b=k$ と円 $a^2+b^2=1$ と接するとき k は最大となる。→ この条件を求めれば終了!



$$\frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - k|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \sqrt{13}$$

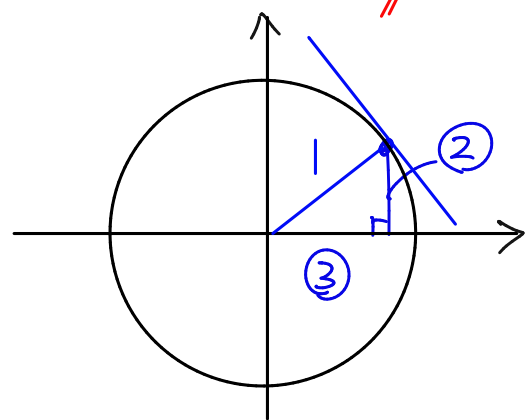
このうち、 $a > 0, b > 0$ の範囲で接するのは $k = \sqrt{13}$ である。

よって $3a+2b$ の最大値は $\sqrt{13}$ である。

このときの (a, b) は、

$$\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$$

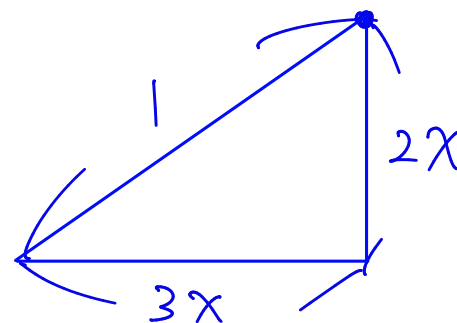
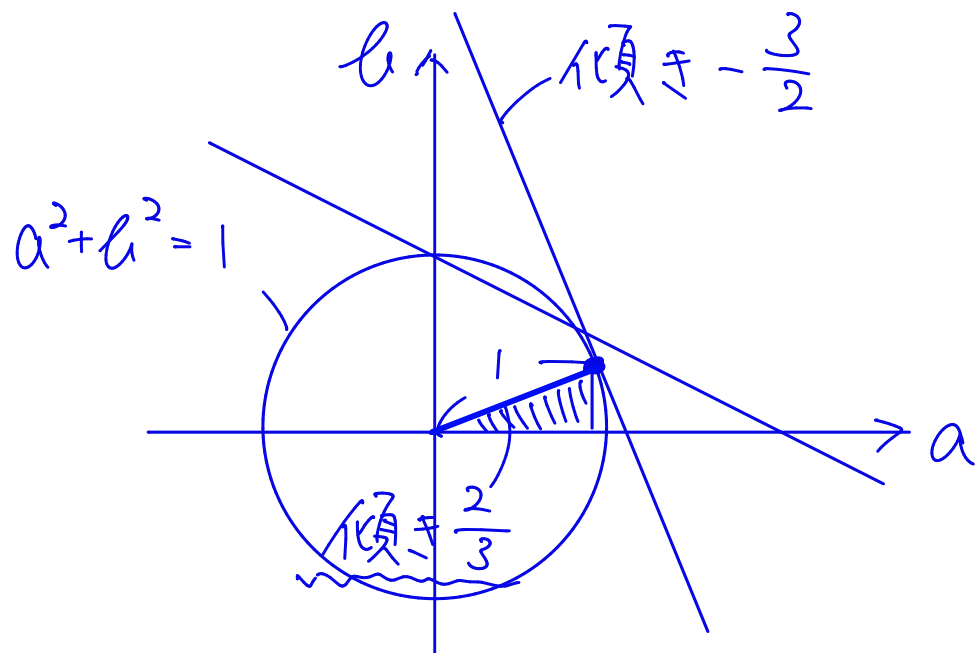
である。



☆ 2つの理の工夫!

直線と円を連立して式で求めるより

図形で考えるのが速い!



$$\rightarrow 4x^2 + 9x^2 = 1$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \text{ とわかる}$$